

# 保持拓扑和尖角特征的网格简化算法

夏仁波<sup>1,2</sup>, 刘伟军<sup>1</sup>, 王越超<sup>1</sup>

(1. 中国科学院沈阳自动化研究所先进制造技术实验室, 沈阳 110016; 2. 中国科学院研究生院, 北京 100039)

**摘 要:** 提出了一种有效的保持拓扑和尖角特征的网格简化算法。由于曲率刻画了模型的尖角特征, 该文利用顶点曲率的高斯加权函数对经典边折叠算法的二次误差测度矩阵进行了修正, 增强了尖角点对新点位置的影响。鉴于网格的拓扑保持具有重要的工程应用, 论述了网格简化中各种可能的拓扑错误, 并给出了相应的解决措施。平衡二叉树和半边匹配数据结构的引入, 提高了拓扑信息重建的速度。最后, 几个网格简化实例显示了该文算法的有效性。

**关键词:** 网格简化; 边折叠算法; 拓扑保持; 尖角特征

## Mesh Simplification Algorithm of Preserving Topology and Sharp Features

XIA Renbo<sup>1,2</sup>, LIU Weijun<sup>1</sup>, WANG Yuechao<sup>1</sup>

(1. Lab of Advanced Manufacture Technology, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016;

2. Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039)

**【Abstract】** The scope of this paper is to propose an efficient mesh simplification algorithm which allows preservation of topology as well as preservation of sharp features on the mesh. As the curvature is useful to enhance the shape description, the quadric error metric matrix of the traditional edge collapse simplification algorithm is modified by weighting the Gauss function of vertex's curvature to strengthen the effect of sharp vertex on the position of new vertex. The topological preservation of the mesh is one important engineering application to which is not paid enough attention currently. This paper discusses the different topological error and gives the corresponding preservation approaches of manifold topology. The execution rate of topological reconstruction is enhanced by introducing the AVL tree and half edge data structure. Finally, several examples are provided in order to assess the efficiency of the new simplification algorithm.

**【Key words】** Mesh simplification; Edge collapse algorithm; Topology preservation; Sharp features

### 1 概述

与多项式样条相比, 多边形网格模型有绘制速度快、描述手段灵活等特点, 因而成为了一种标准的三维造型工具。迄今为止, 多边形网格已经广泛应用于计算机动画、科学计算可视化、虚拟现实医学图像系统的领域。多边形网格的来源主要有两种途径: (1)由 3D扫描仪获取复杂表面采样点的几何信息, 再经拓扑重建得到; (2)由断层扫描图像生成体数据, 通过等值面提取(如采用Marching Cube方法)得到。随着医学、工业CT以及三维扫描仪等三维数据获取设备的不断改进, 生成的多边形网格数据越来越复杂<sup>[1]</sup>, 庞大的数据对计算机的存储容量、传输效率、绘制速度以及处理速度等提出了很高的要求。因此网格简化已经成为一个必需的过程。网格简化是指在尽量保持模型逼近度的前提下, 用尽可能少的三角片面和顶点表示原模型。早在 20 世纪 70 年代, 就有学者讨论网格模型的简化问题, 然而直到 90 年代以后, 网格简化才得到深入的研究, 并有了很多成功的应用。何晖光等人<sup>[2]</sup>对网格简化算法给出了较为全面和详尽的综述。根据国内外的研究成果, 网格简化算法大致可分为以下几类<sup>[3]</sup>: 顶点聚类法<sup>[4]</sup>, 几何元素删除法<sup>[5,6]</sup>, 区域合并法<sup>[7]</sup>以及信号处理法<sup>[8]</sup>等。

在几何元素删除法中, Garland 和 Heckbert 提出的基于边折叠的简化算法较为重要, 该算法速度快, 简化生成的网

格质量仅次于 Hoppe 的能量方法。一个好的网格简化算法应本文在边折叠算法的基础上, 用每个顶点的平均曲率来衡量它的尖锐度, 让尖锐度大的顶点对新点的二次误差矩阵贡献更大, 实现尖角特征的保持。本文的另一个贡献是提出了简化过程中流行网格拓扑结构的保持方法。最后, 基于平衡二叉树和半边数据结构, 实现了网格拓扑信息的快速重建, 缩短了网格简化的预处理时间。

### 2 改进的边折叠算法

#### 2.1 边折叠简化算法

Garland<sup>[9]</sup>的边折叠算法是将一条满足条件的边  $(v_1, v_2)$  简化成一个新顶点  $\bar{v}$ , 记为  $(v_1, v_2) \rightarrow \bar{v}$ , 并让与该边两个端点之一相邻的顶点与新顶点相连, 同时删除 3 条退化的边  $(v_1, v_2)$ 、 $e_3$  和  $e_4$  以及两个三角形  $T_1$  和  $T_2$ , 如图 1 所示。边折叠简化算法首先计算所有边的折叠代价, 然后按折叠代价排序所有的边, 并将满足折叠条件的边按优先级顺序放到一个队列中; 接着从队列头取出一条边进行折叠, 当对该边折叠

**基金项目:** 国家“863”计划基金资助项目(2002AA420060-1)

**作者简介:** 夏仁波(1977-), 男, 博士生, 主研方向: 医学图像处理, 三维几何重建, 快速原型; 刘伟军、王越超, 工学博士、研究员

**收稿日期:** 2005-10-12

**E-mail:** xiarb@sia.cn

之后,相关联的边都从优先级队列中剔除;最后,重新计算其折叠的代价,并且将满足折叠条件的边按优先级顺序插入队列,直到没有边满足折叠条件为止。

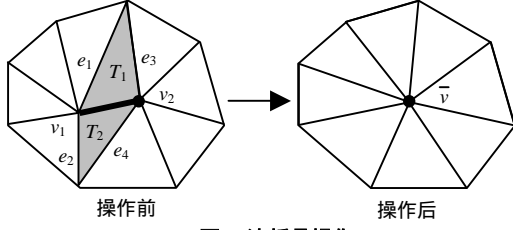


图1 边折叠操作

## 2.2 二次误差测度矩阵的确定

一条边能否被折叠是其代价决定的,代价可以由边的周边信息通过误差测度得到。Garland<sup>[9]</sup>用二次误差测度(Quadratic Error Metrics, QEM)来衡量边折叠的代价。设 $v$ 为三维空间的一点,它的齐次坐标可以表示为 $[v_x, v_y, v_z, 1]^T$ ,  $v$ 的星形邻域三角片集合为 $NT(v)$ 。设 $T$ 是三维网格上的任意三角形,它必对应着空间的一个平面 $p$ ,  $p$ 可以表示为 $ax+by+cz+d=1$ (其中,  $a^2+b^2+c^2=1$ )。于是,顶点 $v$ 的二次误差测度为 $v$ 到星形邻域三角面的距离平方和:

$$\Delta(v) = \sum_{p \in NT(v)} d_p^2(v) \quad (1)$$

$$= \sum_{p \in NT(v)} v^T (K_p) v = v^T \left( \sum_{p \in NT(v)} K_p \right) v$$

$$K_p = pp^T = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{bmatrix}$$

令 $Q(v) = \sum_{p \in NT(v)} K_p$ 为顶点 $v$ 的二次误差测度矩阵,

Garland把边 $(v_1, v_2)$ 折叠到新的顶点 $\bar{v}$ 的代价视为 $\Delta(\bar{v}) = \bar{v}^T (Q_1 + Q_2) \bar{v}$ ,并规定 $\bar{v}$ 的二次误差测度矩阵 $\bar{Q} = Q_1 + Q_2$ 。显然,这种简单的加法原则默认顶点 $v_1$ 和 $v_2$ 对新顶点 $\bar{v}$ 的贡献是等价的,而没有反映出顶点的空间几何属性对新点位置的影响程度,换言之,即没有考虑到尖角特征点对新点的影响应该更加强烈。为此,本为提出采用 $v_1$ 和 $v_2$ 的平均曲率比值的高斯函数值作为加权系数来定义 $\bar{Q}$ 。首先,依照Desbrun<sup>[10]</sup>的方法,计算每个网格顶点 $v$ 的平均曲率:

$$-\kappa v = \frac{1}{4A} \sum_{i \in N(v)} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i)(v_i - v) \quad (2)$$

其中,  $\alpha_i$ 和 $\beta_i$ 是边 $(v_i, v)$ 所在的两个三角形中所对应的顶角,  $N(v)$ 是顶点 $v$ 一阶星形邻域的网格顶点个数,  $A = \sum_{i \in N(v)} A_i$ 是所有以顶点 $v$ 为公共顶点的三角形的面积之和。平均曲率 $\kappa$ 反映了顶点 $v$ 的尖锐程度,于是,本文利用式(3)重新定义 $\bar{v}$ 的二次误差测度矩阵 $\bar{Q}$ :

$$\bar{Q} = 2 \left[ Q_1 (1 - W()) + W(\kappa_1 / \kappa_2) Q_2 \right] \quad (3)$$

其中,  $\kappa_1$ 和 $\kappa_2$ 分别是顶点 $v_1$ 和 $v_2$ 平均曲率,  $W(s) = \exp[-s^2 / (2\sigma^2)]$ 是高斯函数,标准偏差 $\sigma$ 由用户自己定义,在本文中 $\sigma$ 的取值应该尽量使得 $W(1)$ 趋近于0.5。当平均曲率 $\kappa_1$ 和 $\kappa_2$ 的比值 $\kappa_1 / \kappa_2 \Rightarrow 1$ 时,即 $v_1$ 和 $v_2$ 的尖锐程度相当时,  $W(\kappa_1 / \kappa_2) \approx 0.5$ ,式(3)变为 $\bar{Q} = Q_1 + Q_2$ ,得到了

Garland的结果;当 $\kappa_1 / \kappa_2 \Rightarrow \infty$ 时,即 $v_1$ 为尖锐度很高特征点时,  $W(\kappa_1 / \kappa_2) \approx 0$ ,式(3)变为 $\bar{Q} = 2Q_1$ ,此时顶点 $v_1$ 和新顶点 $\bar{v}$ 的二次误差测度矩阵相同,这意味着 $\bar{v}$ 的位置就是顶点 $v_1$ 的位置,于是特征点 $v_1$ 得以保持;当 $\kappa_1 / \kappa_2 \Rightarrow 0$ 时,与上一情况相似,  $\bar{Q} = 2Q_2$ ,特征点 $v_2$ 得以保持。因此,式(3)不但与Garland的QEM算法统一起来,并且充分考虑了特征点对新点的影响,因而采用式(3)中 $\bar{Q}$ 衡量新点 $\bar{v}$ 的折叠代价 $\Delta(\bar{v}) = \bar{v}^T \bar{Q} \bar{v}$ 更加合理。在计算新点的位置时,依然采用Garland对 $\Delta(\bar{v})$ 求偏导的方法,寻找最优值。

## 3 网格简化的拓扑保持

本文处理的多边形网格是流行的,为了保持其拓扑结构,本文采取了如下规则。

### (1) 过度翻转规则

在对多边形网格模型进行简化时,新产生的三角形面片的法向有可能发生翻转,如图2,这不但改变了网格的外观,而且多次简化操作以后可能导致网格出现拓扑错误。因此,在进行边折叠算法时,应该建立一种预警机制,阻止这种情况的发生,此处采取的办法与文献[9]类似。当进行一次边折叠时,计算折叠后相邻活动面(active face)之间的法向量夹角,只要一个夹角大于 $90^\circ$ ,就意味着网格翻转过度,此次边折叠不易发生,于是,算法转移执行到折叠代价紧随其后的边。

### (2) 相邻顶点规则

当对如图3所示边 $(v_1, v_2)$ 进行简化后,发现面 $p_1$ 和 $p_2$ 重合在一起,而边 $(v_1, v_i)$ 有4个相邻面,显然,此时多边形网格的拓扑结构发生了改变。于是,本文规定:如果一条待折叠边的两个端点 $v_1$ 和 $v_2$ 拥有3个或3个以上的共同相邻顶点,则该边不宜执行简化操作。

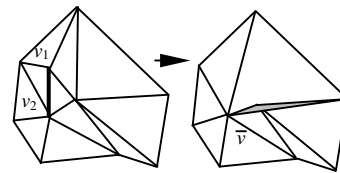


图2 边折叠导致网格过度翻转

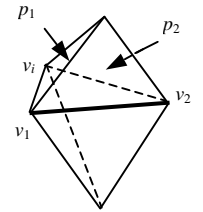


图3  $v_1$ 和 $v_2$ 有3个共同的相邻顶点

### (3) 相邻边界边规则

图4(a)或图4(b)所示的边折叠后,新顶点拥有4条边界边,破坏了原来的拓扑结构。为此,本文提出:如果待折叠边的两个端点 $v_1$ 和 $v_2$ 都是边界点,即每个端点都拥有两条相邻边界边,并且两个端点没有共同的相邻边界边,则不对该边进行简化。

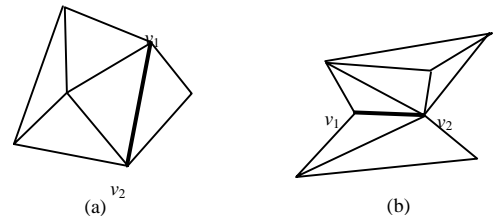


图4 相邻边界边规则

### (4) 相邻边界顶点规则

图5给出了一种带有内孔的多边形网格简化结果,在对

网格进行一次边折叠操作以后,原来的内孔消失了,即模型的拓扑结构发生了改变。对于此类情况,本文约定:如果待折叠边的两个端点都是边界顶点,并且两个端点有共同的相邻边界顶点,则不对该边进行简化。

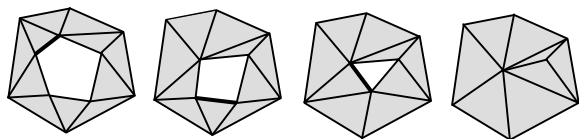


图5 相邻边界顶点规则

#### 4 快速拓扑信息重建

无序三角面片的拓扑信息重建是网格简化的必要条件。对于大规模的网格模型,如果采用直接方法,拓扑重建将占据较多的处理时间。考虑到拓扑重建的主要时间耗在顶点查找和边查到过程,本文利用平衡二叉树进行顶点搜索,采用半边匹配实现边和面的快速查找,提高了算法的执行效率。由于平衡二叉树上任意节点的左右子树的深度之差都不超过1,因此它的时间复杂度为 $O(\log n)$ , $n$ 为节点个数。半边合并的平均时间复杂度为 $O(F)$ , $F$ 为三角面片个数。

#### 5 实验结果

为了验证新算法的执行效果,本文给出了几个三角网格模型的简化结果,并与经典算法进行了比较。图7显示了本文算法在保持拓扑结构方面的能力。图6(a)是恐龙的初始模型,它包含有12 460个三角面片,当采用Garland的算法把原模型简到3 308个三角片时,发现恐龙的左臂产生了如图6(b)所示的拓扑错误,经核查,属于没有考虑过渡翻转因素累积所致,图6(c)给出了本文算法在简化同等数目三角面片下的结果,拓扑错误得以避免。图7是本文算法综合性能的表现。图7(a)是骆驼的初始模型,共有4 882个三角面片,当用Garland算法把模型简化到214个三角片时,发现骆驼的脚部某个顶点有4个相邻边界边,如图7(b),经研究发现,这是由于没有考虑第3节的相邻顶点规则所致,而本文算法有效地避免了此类拓扑错误的发生,见图7(c)。耳朵是骆驼的特征部位,简化到214个三角片时,Garland算法有了明显的钝化,而本文算法保持了它的耳部特征。

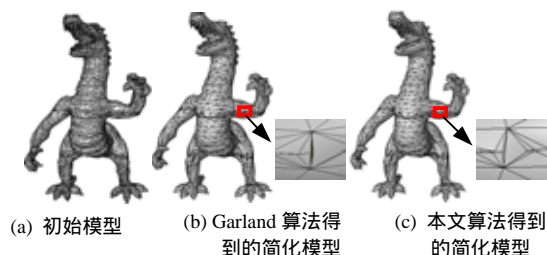


图6 恐龙模型简化结果比较

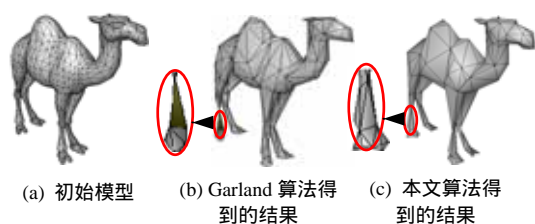


图7 骆驼模型简化结果比较

表1给出了本文算法与Garland算法在执行时间上的对

比结果,并假设Garland算法采用了直接拓扑重建方法。从表1可以得知,拓扑重建是相当耗时的过程,本文采用了平衡二叉树和半边匹配数据结构,提高了拓扑重建的速度。从简化这个环节来看,本文算法由于需要进行顶点曲率计算和拓扑保持判断,消耗了一定的时间,但这部分时间的比例并不大,因为全局性的顶点曲率计算只需进行一次,后续的曲率计算只涉及到活动顶点。

表1 本文算法与Garland算法在执行时间上的对比结果

Model Execution time (s)	Camel (faces) before 4882, after 214		Dinosaur (faces) before 12460, after 3308		bunny (faces) Before 69448, after 15000	
	New algorithm	Garland algorithm	New algorithm	Garland algorithm	New algorithm	Garland algorithm
Total time	4.142	7.218	8.329	19.795	31.156	79.319
Simplification	2.569	1.673	5.248	3.576	18.352	14.484
Topological reconstruction	1.573	5.545	3.081	16.219	12.794	64.835

#### 6 结论

本文提出了一种基于边折叠的网格简化算法,基于顶点的平均曲率,修正了Garland的二次误差测度矩阵,新的矩阵度量了原始顶点的尖锐程度对新点位置的贡献。拓扑保持在制造领域具有重要的实际意义,本文较为系统地谈论了各种可能的拓扑错误,并提出了相应的解决措施。实验结果表明,本文的算法在保持模型尖锐特征以及拓扑结构方面具有较为明显优势。平衡二叉树和半边匹配结构的引入提高了算法的执行效率。新算法另一个显著特点是,整个过程无需用户选取各种惩罚系数或者阈值。将来的工作着重于算法的进一步完善,比如,如何避免自相交引起的拓扑改变以及三角网格优化等方面。

#### 参考文献

- Levoy M, Pulli K, Curless B, et al. The Digital Michelangelo Project: 3D Scanning of Large Statues[C]. Proceedings of SIGGRAPH'00, 2000:131-144.
- 何晖光,田捷,张晓鹏等. 网格模型化简综述[J]. 软件学报, 2002, 13 (12): 2215-2224.
- 张必强,邢渊,阮雪榆. 基于特征保持和三角形优化的网格模型简化[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38 (8): 1373-1377.
- Low K L, Tan T S. Model Simplification Using Vertex-clustering[C]. Proceedings of the 1997 Symposium on Interactive 3D Graphics, ACM SIGGRAPH, 1997.
- Hoppe H, Deroose T, Duchamp T. Mesh Optimization[C]. Proceedings of the SIGGRAPH, 1993.
- Wu Y, He Y J, Cai H M. QEM-based Mesh Simplification with Global Geometry Features Preserved[C]. Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australasia and South East Asia, 2004: 50-57.
- Kalvin A D, Taylor R H. Surfaces: Polygonal Mesh Simplification with Bounded Error[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1996, 16 (3): 64-77.
- Lounsbery M, Deroose T. Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type[R]. Washington: University of Washington, 1994.
- Garland M, Heckbert P S. Surface Simplification Using Error Metrics [C]. Proc. of SIGGRAPH'97. Los Angeles: ACM Press, 1997: 209-216.
- Desbrun M, Meyer M, Schröder P, et al. Implicit Fairing of Irregular Meshes Using Diffusion and Curvature Flow[C]. Proc. of SIGGRAPH, 1999.