

图像平滑的自适应保真全变分模型

冷成财^{1,2}, 赵凤群², 刘向增¹, 肖 星¹

(1. 西北工业大学理学院, 西安 710072; 2. 西安理工大学理学院, 西安 710054)

摘 要: 提出一种自适应保真的全变分平滑模型, 证明其解的稳定性。结合各向同性和全变分的优点, 利用扩散系数构造保真项, 从而增强图像边缘, 该模型根据图像的梯度信息确定门限值进而选择合适的图像平滑方法。在去除噪声和保持边缘的同时避免了“阶梯”效应, 实验结果表明, 该模型能有效地去除噪声, 提高图像的峰值信噪比。

关键词: 图像平滑; 自适应全变分; 保真项

Adaptive Fidelity Total Variation Model for Image Smoothing

LENG Cheng-cai^{1,2}, ZHAO Feng-qun², LIU Xiang-zeng¹, XIAO Xing¹

(1. School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072; 2. School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054)

【Abstract】 An adaptive fidelity total variation image smoothing model is proposed. The proof of the stability of solution for this model is given. The method combines the merits of isotropic and total variation. A fidelity term constructed by the diffusion coefficient is used to enhance the edge of the image. The thresholds are introduced based on the gradient information of image, which helps the model to choose the appropriate smoothing scheme. This model removes noises highly and retains sharp edges without exhibiting staircasing. Experimental results show this model is successful in overcoming staircasing and efficiently removing noise, and the PSNR is high.

【Key words】 image smoothing; adaptive total variation; fidelity term

1 概述

在图像生成和传输过程中, 往往会加入大量噪声, 这不仅严重影响图像的视觉效果, 同时给以后的图像分析和理解带来困难, 因此, 图像平滑是图像预处理的主要解决内容之一。

在图像平滑过程中, 研究者提出许多全变分方法^[1-7]。经典的图像全变分平滑模型是基于 L^2 范数的模型^[1], 此模型实质上就是各向同性扩散模型。该方法能有效地去除噪声, 但使得图像的边缘变得模糊。文献[2]提出一种全变分的图像平滑方法。该方法实质上就是各向异性扩散, 它能在去噪的同时很好地保持图像的边缘。但该模型有时会将噪声作为边缘, 使其在平滑区域产生“阶梯”效应。文献[3]提出一种基于 L^{1+p} , $0 < p < 1$ 范数的广义的全变分去噪模型, 该模型能克服假边缘的产生, 且在去噪的同时保持了边缘, 但对 p 的选取很敏感。为了克服对 p 的选取敏感性, 文献[4-7]又提出各自的全变分平滑模型, 它们能较好地去除噪声, 有的在平滑过程中会出现“阶梯”效应, 甚至模糊图像。文献[8-9]分别提出基于图像局部结构和对称四阶偏微分方程的去噪方法, 在一定程度上提高了图像的去噪能力。

根据上述情况, 本文提出一种自适应保真全变分平滑模型, 该模型不仅能去除噪声和增强图像边缘特征等细节, 而且在平坦区域避免了“阶梯”效应, 同时提高了峰值信噪比。

2 模型的建立及其解的稳定性

文献[7]提出自适应TV平滑模型:

$$\min_u E(u) = (1/p_1(x, y)) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p_1(x, y)} dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx dy \quad (1)$$

该模型能较好地克服“阶梯”效应, 但在一定程度上模糊及破坏了图像的边缘。

本文提出一种自适应保真全变分图像平滑模型:

$$\min_u E(u) = g(x, y) \int_{\Omega} \varphi(x, y, |\nabla u|_{\alpha}) dx dy + \frac{\lambda(1-g(x, y))}{2} \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx dy \quad (2)$$

其中, u_0 是得到的观察图像; λ 为常参数, 且

$$\varphi(x, y, |\nabla u|_{\alpha}) = \begin{cases} \frac{1}{p_1(x, y)} |\nabla u|_{\alpha}^{p_1(x, y)} & 1 < p_1(x, y) < 2, |\nabla u|_{\alpha} < \varepsilon \\ \frac{1}{p_2} |\nabla u|_{\alpha}^{p_2} & 1 < p_2 < 2, |\nabla u|_{\alpha} \geq \varepsilon \end{cases} \quad (3)$$

其中, $p_1(x, y) = 1 + \frac{1}{1 + k_1 |\nabla G_{\sigma} u|^2}$, $k_1 > 0$, $g(x, y) = \frac{1}{1 + k_2 |\nabla G_{\sigma} u|^2}$, $k_2 > 0$, G_{σ} 为高斯滤波函数, 即:

$$G_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \frac{-(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}, \quad \sigma > 0$$

由 Euler 方程的极值条件可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x, y) \cdot \text{div}(\varphi(x, y, |\nabla u|_{\alpha})) - \lambda(1-g(x, y)) \cdot (u - u_0) = g \nabla \cdot \left[\frac{|\nabla u|_{\alpha}^{p_1-2} \nabla u}{|\nabla u|_{\alpha}^{p_2-2}} - \lambda(1-g)(u - u_0) \right] \quad (4)$$

定理 (方程解的稳定性) 考虑式(4)的离散形式,

$1 < p_1(x, y) < 2$, $1 < p_2 < 2$, 满足初始的条件 $u_0 \in l^2$, 有

$$\|u(t)\|_{l^{\infty}} \leq \|u_0\|_{l^{\infty}} \text{ 和 } \|u(t)\|_{l^2} \leq \|u_0\|_{l^2}$$

基金项目: 陕西省教育厅科学研究计划基金资助项目(08JK395); 西安理工大学校级基金资助项目“偏微分方程和分形相结合的图像平滑研究”(108-210710)

作者简介: 冷成财(1982 -), 男, 博士研究生, 主研方向: 图像去噪, 计算机视觉, 模式识别; 赵凤群, 教授; 刘向增, 博士研究生; 肖 星, 硕士研究生

收稿日期: 2009-12-07 **E-mail:** lcc1632000@163.com

证明：设空间网格步长为 h ，利用中心差分得：

$$\Delta_x = \Delta_x u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad \Delta_y = \Delta_y u_{ij} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}$$

$$Z = \begin{cases} |\nabla u|_{\alpha}^{p_1-2} \nabla u \\ |\nabla u|_{\alpha}^{p_2-2} \nabla u \end{cases} \text{ 的散度表示为}$$

$$Z_x = \frac{\Delta_x u_{ij}}{((\Delta_x u_{ij})^2 + (\Delta_y u_{ij})^2)^{\frac{2-p_1 p_2}{2}}}$$

$$Z_y = \frac{\Delta_y u_{ij}}{((\Delta_x u_{ij})^2 + (\Delta_y u_{ij})^2)^{\frac{2-p_1 p_2}{2}}}$$

式(4)近似表达式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_{xy}$$

其中， $F_{xy} = \Delta_x Z_x + \Delta_y Z_y$ 。

对于 $\forall x, y \in \Omega$ ，都有 $1 < p_1(x, y) < p_2(x, y) < 2$ 。如果级数 $\sum |u_{ij}|^{p_0}$ 是收敛的，根据数学分析中 M-判别法，则级数 $\sum |u_{ij}|^{p_1}$ 也是收敛的，故有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_{xy} = \Delta_x Z_x + \Delta_y Z_y$$

(1)先证 $|u_{ij}| > 1$ ，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} \sum |u_{ij}|^{p_0} &= p_0 \sum |u_{ij}|^{p_0-1} \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} = p_0 \sum |u_{ij}|^{p_0-1} (\Delta_x Z_x + \Delta_y Z_y) = \\ &= p_0 \sum (Z_x \cdot \Delta_x |u_{ij}|^{p_0-1} + Z_y \cdot \Delta_y |u_{ij}|^{p_0-1}) = \\ &= p_0 (p_0 - 1) \sum (Z_x |u_{ij}|^{p_0-2} \Delta_x u_{ij} + Z_y |u_{ij}|^{p_0-2} \Delta_y u_{ij}) = \\ &= p_0 (p_0 - 1) \sum |u_{ij}|^{p_0-2} |\nabla u|^{p_0} = 0 \end{aligned}$$

则 $\sum |u_{ij}|^{p_0}$ 是收敛的，由 M-判别法可知级数 $\sum |u_{ij}|^{p_1}$ 是收敛的；当 $1 < p_2 < 2$ 时，同理可证，级数 $\sum |u_{ij}|^{p_2}$ 是收敛的。

(2)当 $0 < |u_{ij}| < 1$ 时，同理可证，级数 $\sum |u_{ij}|^{p_1 p_2}$ 也是收敛的。

综上，由收敛条件可知，式(4)的解是稳定的。

模型(式(4))分析如下：

(1)用扩散系数 $g(\cdot)$ 来增强图像的边缘和控制模型的扩散速度。如果在点 (x, y) 的邻域内有较小的梯度模，该点就被认为是图像平滑区域的内点，在该平滑区域扩散加强，反之，在这点有较大的梯度模，就认为是图像的边缘，扩散就降低。

(2)如果 $|\nabla u|_{\alpha}$ 小于门限值 ε ， $p_1(x, y)$ 能根据图像的梯度信息自适应选择最合适的平滑策略，扩散的速度和方向由局部图像的像素点决定。在局部有足够大的梯度，即 $p_1(x, y) \rightarrow 1$ ，多数被看作图像的边缘，这时只用全变分扩散；当图像的梯度趋于零时，即 $p_1(x, y) \rightarrow 2$ ，就看作图像的同种区域，利用各项同性扩散。如果 $|\nabla u|_{\alpha}$ 大于门限值 ε ，该扩散是联合了各项同性扩散和各项异性的全变分扩散，就克服了它们各自在图像平滑中的缺点。

(3)该模型的后一项是保真项。在图像局部有足够大的梯度，即 $g(\cdot) \rightarrow 0$ ，模型的第一项几乎不扩散，这就保护了图像的边缘；当图像的梯度趋于零时，即 $g(\cdot) \rightarrow 1$ ，扩散就利用模型的前项，起到了很强的平滑作用。

3 实验结果及分析

图 1 和图 2 给出了本文方法、文献[2]方法和文献[7]方法的平滑结果及平滑后的 Canny 算子检测结果。原图加了均值为零、标准差为 $\sigma = 0.01$ 的高斯噪声。在所有实验中，取 $\alpha = 1$ ， $\lambda = 0.10$ ， $h = 1$ ， $\Delta t = 0.20$ ，扩散指数 $p_1(x, y)$ 中的 k_1 取值为 0.0025 ， $k_2 = 0.025$ 。文献[2]方法迭代 150 次，文献[7]方法和

本文方法分别迭代 15 次，参数分别为 $\varepsilon = 150$ ， $k_1 = 0.025$ ， $k_2 = 0.8$ ， $p_2 = 1.25$ 。表 1 给出文献[2]方法、文献[7]方法和本文方法处理后的峰值信噪比的比较结果。



图 1 3 种全变分模型平滑结果比较

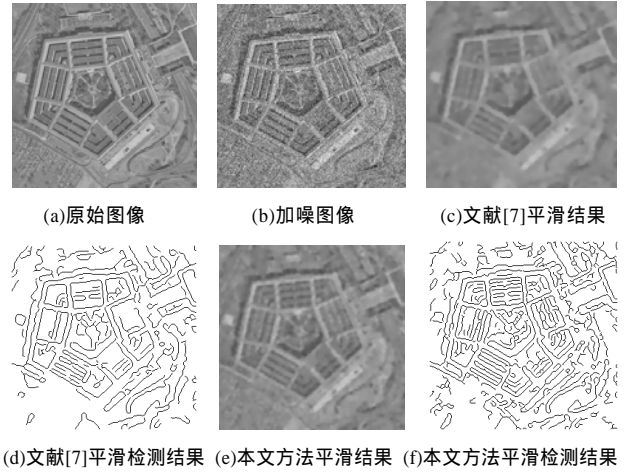


图 2 2 种全变分平滑和检测结果比较

表 1 加高斯噪声图像处理后的峰值信噪比比较

方法	PSNR/dB	
	实验 1	实验 2
文献[2]方法	25.214 7	—
文献[7]方法	25.417 3	24.259 8
本文方法	25.909 6	25.022 4

从图 1 可以看出，文献[2]方法能很好地保持图像的边缘，但容易出现“阶梯”效应。文献[7]方法在平滑区域中避免了文献[2]的“阶梯”效应，但图像模糊了且图像特征遭到破坏。本文的方法在平滑的过程中不仅有效地去除噪声，也很好保护了图像的边缘等特征，同时也避免了“阶梯”效应，克服了文献[2,7]的不足。从图 2 可以看出，文献[7]在平滑过程中模糊了图像且在一定程度上破坏了图像的特征。本文的方法在平滑的过程中不仅有效地去除噪声，也很好保护了图像的边缘等特征，同时也避免了“阶梯”效应，克服了文献[7]的不足，并且对具有丰富线、边、轮廓等特征的该图像用 Canny 算子进行边缘检测，从检测结果可以看出该方法能更好地保护图像特征。最后从迭代次数上来说本文方法只需要迭代很少的次数，就能达到很好的效果。节省了迭代时间，这也说明了本方法的优越性。从表 1 可以看出本文方法处理后图像的峰值信噪比比文献[2,7]峰值信噪比高。

(下转第 176 页)