

基于网络邻域拓扑的粒子群优化算法

姚灿中, 杨建梅

(华南理工大学工商管理学院, 广州 510640)

摘 要: 探讨类无标度网、全局耦合网、环形网、随机网、星形网等邻域拓扑结构对粒子群优化算法寻优效果的影响。理论分析与实验结果显示, 以类无标度网作为邻域拓扑结构的粒子群优化算法在误差范围内的寻优效果最好, 收敛速度最快, 可以较好地避免陷入局部最优, 且网络平均度对粒子群优化算法的寻优效果有一定的影响。

关键词: 粒子群优化算法; 复杂网络; 类无标度网

PSO Algorithm Based on Network Neighborhood Topology

YAO Can-zhong, YANG Jian-mei

(School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

【Abstract】 This paper discusses the influence of Scale-Free Like(SFL), GLOBAL, CYCLE, ER and STAR on optimization effect of Particle Swarm Optimization(PSO). Analysis and experimental results show that PSO performs better based on Scale-Free network neighborhood topology than on other neighborhood topologies such as regular network, random network, star network and traditional PSO. A new approach considering Scale-Free network neighborhood topology may be suggested to improve the performance of PSO near the optima and its convergence speed. And mean degree of network has influence on optimization effect of PSO.

【Key words】 Particle Swarm Optimization(PSO) algorithm; complex network; Scale-Free Like(SFL) network

1 概述

粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization, PSO)^[1]是一种通过迭代寻优的优化工具和进化计算技术。传统的 PSO 算法在低维数空间寻优时具有寻优速度快、求解质量高的特点, 但是当维数上升时, 容易陷入局部最优解。针对这一缺点, 很多研究者提出了改进的 PSO 算法, 其中, 对粒子邻域拓扑的改进有不少研究成果。比如文献[2]提出了粒子寻优基于不同的拓扑结构, 这在一定程度上有助于避免算法陷入局部最优解, 但不同问题需要基于不同的拓扑结构, 并且事先很难预测使用哪种拓扑结构最佳。且文献[2]并未对实际目标函数进行测试, 对基于网络邻域拓扑的 PSO 寻优效果只是从理论上加以阐述。文献[3]提出了 PSO-DT(PSO based on Dynamic Topology)方法, 其采用概率选择机制在算法前期弱化全局最优粒子的影响力, 以增强粒子群中解的多样性, 而在算法后期强化了全局最优粒子的影响力, 使粒子群最终收敛到一个最优解上, 并通过实验证明了该方法的有效性和实用性。然而该方案并未考虑网络拓扑结构的影响。文献[4]借鉴了 Frankenstein's PSO 的研究成果, 研究了当自适应邻域拓扑结构开始于全连接拓扑、随着优化迭代逐渐降低粒子连接数直至形成环形连接拓扑的情况, 对 PSO 进行了有效的改进。然而, 该网络在自适应过程中网络的同质性较大, 此外, 环状网络作为一种规则网络可能并非是粒子群寻优过程潜在的邻域拓扑。当然, 对于粒子群算法的改进还有很多^[5]。

基于上述改进的 PSO, 本文重点对基于类无标度(Scale-Free Like, SFL)网这种异质性较大的网络拓扑邻域的 PSO 进行研究, 同时对比了类无标度网、全局耦合网(GLOBAL)、环形网(CYCLE)、随机网(ER)、星形网(STAR)这 5 种邻域拓

扑的 PSO 寻优效果, 最后以 SFL 网为例说明不同拓扑指标(平均度)的网络对 PSO 寻优效果产生的影响。

2 传统 PSO 算法及网络性质

PSO 算法初始化为一组随机粒子, 通过迭代寻优。在每一次寻优过程中, 粒子通过追寻 2 个极值来更新自己的位置: (1)粒子自身的历史最优解, 称为个体极值 *pbest*; (2)通过与整个群体比较找到的最优解, 称为整体极值 *gbest*。粒子结合这 2 个极值, 根据以下公式更新速度和位置, 在目标函数的解空间飞行:

$$\begin{aligned}v_{id}^{k+1} &= v_{id}^k + \eta_1 \cdot \text{rand}() \cdot (p_{id}^k - x_{id}^k) + \eta_2 \cdot \text{rand}() \cdot (p_{gd}^k - x_{id}^k) \\x_{id}^{k+1} &= x_{id}^k + v_{id}^{k+1}\end{aligned}$$

其中, η_1 和 η_2 是学习因子, 一般取值为 2 或比 2 稍大^[3-4]; $\text{rand}()$ 是 0~1 的随机数; v_{id}^k 表示粒子 *i* 在 *k* 次迭代中 *d* 维的速度; x_{id}^k 表示粒子 *i* 在 *k* 次迭代中 *d* 维的位置; p_{id}^k 是粒子 *i* 在 *d* 维的个体极值的位置, 即 *pbest* 在 *d* 维的分量; p_{gd}^k 是粒子 *i* 在 *d* 维的全体极值的位置, 即 *gbest* 在 *d* 维的分量。

为了更好地控制 PSO 的开发和探测能力, Shi Yuhui 等将惯性因子变成随时间动态变化的因子, 并通过实验证明了该方法能够有效地改进 PSO 的寻优能力。本文考虑在惯性因子不随时间动态变化的情况下, 网络拓扑结构的性质对 PSO 效果的影响。

传统 PSO 的邻域结构实质上是一个全局耦合网络, 在这

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70773041)

作者简介: 姚灿中(1983 -), 男, 博士, 主研方向: 复杂系统与复杂网络的建模与仿真; 杨建梅; 教授、博士、博士生导师

收稿日期: 2010-03-24 **E-mail:** cz.yao@mail.scut.edu.cn

种网络结构中,任意 2 个节点之间都有边连接。在迭代过程中,每个粒子都将与其他所有粒子(位置)进行比较,从而向最优粒子靠近。在具有相同节点数的所有网络拓扑中,全局耦合网络具有最小的平均路径长度($L=1$)和最大的集聚系数($C=1$)。

3 类无标度网络拓扑邻域对 PSO 效果的影响

3.1 类无标度网的特殊拓扑性质

无标度网是一种复杂网络模型^[6],增长和择优连接是它的 2 个特性。经验证明,许多实际网络都是无标度网^[6-7]。在一个度分布为具有适当幂指数 γ (通常 $2 < \gamma < 3$)的大规模无标度网络中,绝大部分节点的度相对较低,但存在着少量度相对较高的节点。这类网络的异质性较强,因此,称为非均匀网络。值得注意的是,在传统 PSO 中,寻优粒子的数量总体较少,一般为 15~40,因此,与经典意义上的无标度网相比规模要小,为了以示区分,称之为类无标度网。

3.2 基于 SFL 网邻域的 PSO

SFL 网结构中同时存在着少数具有大量连接边(度)的 Hub 节点和大多数具有少数连接边的非 Hub 节点,因此,网络具有大的异质性。将此拓扑结构作为粒子的寻优空间,使得位于 Hub 节点位置的粒子和全局寻优(GLOBAL)情况下的粒子相类似,但是由于并不与网络中所有其他粒子比较,因此位于 Hub 节点位置的粒子向局部最优值收敛的速度更快,而位于非 Hub 节点的粒子能够保持寻找局部最优的性能,即 SFL 网拓扑的邻域结构在可接受的误差范围内必定有更好的寻优效果,这种效果在函数具有较深的局部最优值时尤为明显。

3.3 实验与结果

3.3.1 测试函数与网络拓扑设置

实验采用 4 个测试函数——Sphere、Rastrigrin、Griewank、Rosenbrock 对以 GLOBAL 网为邻域拓扑的 PSO 和以 SFL 网为邻域拓扑的 PSO 效果进行比较。由于测试函数曲面差异较大,本文设置了可接受误差,即收敛阈值,对于求极小值而言,当结果小于该收敛阈值时即认为本次搜索成功。阈值应根据算法特性及目标测试函数来选取,允许误差过大或过小都不能反映出算法的优化性能。4 个测试函数的具体设置如下:函数维数为 6,惯性因子为 0.8, $\eta_1=\eta_2=2.1$ 。Sphere 函数 X_i 的取值范围为 $[-100,100]$,可接受误差小于 0.1;Rastrigrin 函数 X_i 的取值范围为 $[-100,100]$,可接受误差小于 100;Griewank 函数 X_i 的取值范围为 $[-600,600]$,可接受误差小于 0.5;Rosenbrock 函数 X_i 的取值范围为 $[-40,40]$,可接受误差小于 100。另外,粒子规模数为 $N=30$ 。

采用的 SFL 网和 GLOBAL 网的特征对比见表 1,其中, C 为网络集聚系数; L 为平均路径长度; Dm 为网络直径; k_{avg} 为网络的平均度。节点 i 的度 k_i 定义为与该节点相连接的其他节点的数目。 k_{avg} 是网络中所有节点 i 的度 k_i 的平均值。集聚系数、平均路径长度、网络直径均是衡量网络拓扑指标^[6]。

表 1 2 种网络邻域拓扑的差异性比较

| 函数/ f 邻域 | 度分布情况 | k_{avg} | C | L | Dm |
|------------|-----------------------|-----------|-------|------|------|
| SFL 网 | 幂律分布($\gamma=2.02$) | 3.53 | 0.194 | 2.45 | 5 |
| GLOBAL 网 | 累计均匀分布 | 29.00 | 1.000 | 1.00 | 1 |

3.3.2 实验结果

图 1~图 4 是 4 个函数的测试结果,表 2 是结果的详细数据。最优值平均指的是在多次迭代过程中达到可接受误差范围的平均最优值,它和方差一起构成衡量粒子寻优的平均质

量和波动性;成功率为整个迭代过程中处于可接受误差范围内的迭代成功次数比例,衡量粒子寻优的质量;收敛时间是达到误差临界的最少迭代次数比例,体现了粒子的收敛速度,是衡量算法效率的重要指标;最终适应值表示最终收敛时函数的最优值,也是算法优劣的衡量指标之一。

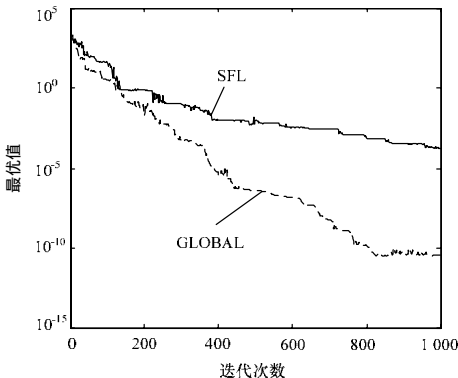


图 1 Sphere 函数测试结果

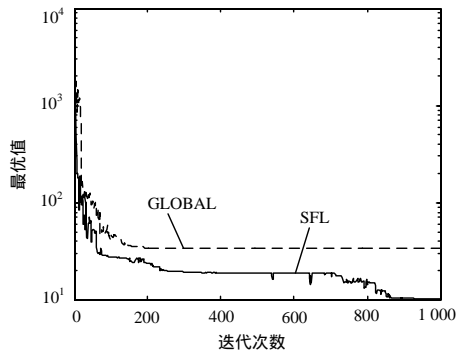


图 2 Rastrigrin 函数测试结果

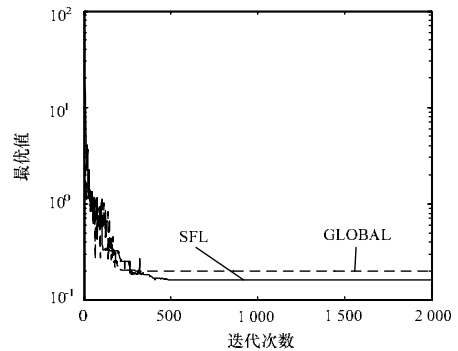


图 3 Griewank 函数测试结果

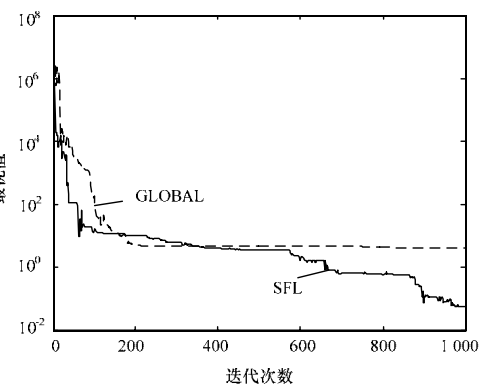


图 4 Rosenbrock 函数测试结果

表 2 性能测试结果

| 函数 | 邻域拓扑 | 迭代次数 | 最优值平均 (标准方差) | 成功率 | 收敛时间 | 最终适应值 |
|------------|--------|-------|-----------------|-------|-------|-----------|
| Sphere | GLOBAL | 1 000 | 0.004(0.015) | 0.830 | 0.167 | 3.67e-011 |
| | SFL | 1 000 | 0.010(0.018) | 0.702 | 0.256 | 1.55e-004 |
| Rastrigrin | GLOBAL | 1 000 | 35.994(8.481) | 0.954 | 0.030 | 33.828 5 |
| | SFL | 1 000 | 19.835(9.459) | 0.978 | 0.011 | 10.008 2 |
| Griewank | GLOBAL | 2 000 | 0.206(0.027) | 0.935 | 0.033 | 0.201 9 |
| | SFL | 2 000 | 0.175(0.042) | 0.950 | 0.029 | 0.159 9 |
| Rosenbrock | GLOBAL | 1 000 | 6.119(6.569) | 0.900 | 0.101 | 4.007 7 |
| | SFL | 1 000 | 4.729(6.592) | 0.943 | 0.058 | 0.057 5 |

由实验结果可以得出：

(1)由于 Sphere 是一个单峰函数，因此 SFL 网拓扑的搜索比 GLOBAL 网慢，但是在可接受误差范围内，如图 1 所示。表 2 中 SFL 网邻域拓扑的最终适应值为 1.55e-004，也表现出良好的效果。

(2)从图 2~图 4 可以看出，在多峰函数的测试中，SFL 网络拓扑的寻优结果较好，其平均最优值、最终适应值、收敛时间值都比 GLOBAL 网小，其成功率比 GLOBAL 网高。这与 SFL 本身的性质有关，网络的度分布极端不均衡，大量的粒子有较小的搜索邻域，而少数粒子具有大范围的搜索。

(3)如图 2~图 4 所示，当解空间比较复杂，特别是函数容易陷入局部最优解的空间中时，GLOBAL 网拓扑的粒子寻优在最后的迭代中都陷入了局部最优点，即出现了“早熟”现象，而 SFL 网拓扑邻域的寻优效果比 GLOBAL 网好。

4 基于其他网络拓扑邻域的 PSO

改变粒子的寻优邻域的拓扑结构，采用 CYCLE 网、ER 网、STAR 网进行测试，3 种网络的拓扑结构特征如下：

(1)CYCLE 网，也称最近邻耦合网络，是一种得到大量研究的稀疏规则网络模型，其中每一个节点只和它周围的邻居节点相互连接。具有周期边界条件的最近邻耦合网络包含 N 个围成一个环的点，其中，每个节点都与它左右各 $K/2$ 个邻居节点相互连接，这里的 K 是一个偶数，本文取 $K=2$ 。

(2)STAR 网，也称星形耦合网络，它有一个中心点，其余粒子都只与这个中心粒子连接，而它们之间是不连接的。

(3)ER 网，是一种经典随机图模型，任意 2 个粒子之间相互连接的概率为 p ，本例取 $N=10$ 、 $p=0.3$ 。ER 随机图的度分布可以用 Poisson 分布来表示，因此，也称为“Poisson 随机图”。

本文对 4 个测试函数都做了实验，迭代次数为 $T=2\ 000$ ，限于篇幅，只列出 Rosenbrock 函数的测试结果，如表 3 所示。

表 3 Rosenbrock 函数测试结果

| 邻域拓扑 | k_{avg} | L | C | D_m | 最优值平均 (标准方差) | 成功率 | 收敛时间 | 最终适应值 |
|-------|-----------|-------|-------|-------|-----------------|-------|-------|-----------|
| SFL | 3.53 | 2.445 | 0.093 | 5 | 2.191(9.07) | 0.960 | 0.019 | 3.40e-008 |
| CYCLE | 2.00 | 7.258 | 0.000 | 15 | 5.940(14.42) | 0.858 | 0.143 | 0.183 9 |
| ER | 3.33 | 2.598 | 0.137 | 5 | 4.222(14.39) | 0.909 | 0.040 | 1.92e-005 |
| STAR | 1.93 | 1.809 | 0.000 | 2 | 5.812(5.16) | 0.931 | 0.070 | 4.039 7 |

图 5、图 6 为不同网络结构下 Rastrigrin 函数和 Rosenbrock 函数的测试结果。从实验结果可以看出，不同网络邻域拓扑的寻优效果有较大的差别，具体如下：

(1)Rastrigrin 函数具有大量很深的局部最优点，很难获得全局最优点。在对 Rastrigrin 函数的测试中，SFL 网、CYCLE 网和 ER 网收敛时的最终适应值相差不大，但 SFL 网的收敛时间较短，收敛速度较其他 3 个网快。

(2)Rosenbrock 函数的解空间具有非常多的狭窄通道，以 SFL 网为邻域拓扑的 PSO 在最优值平均、成功率、收敛时间以及最终适应值方面都比其他几个网络邻域拓扑的 PSO 有更好的表现。

(3)STAR 网邻域的粒子寻优效果较差，不仅较早地陷入了局部最优，其最终适应值也最大。这是由星形网络的拓扑结构决定的，星形网的平均路径长度太短，因此，粒子寻优的效率不高。

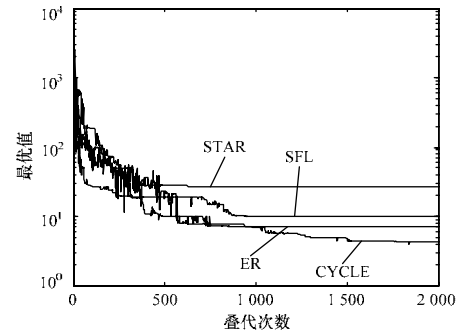


图 5 不同网络拓扑的 Rastrigrin 函数测试

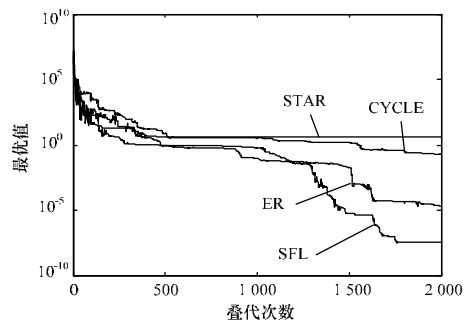


图 6 不同网络拓扑的 Rosenbrock 函数测试

5 网络平均度对 PSO 的影响

由上文可知，PSO 寻优的邻域网络的拓扑性质将对其最终寻优效果有影响。SFL 网作为 PSO 寻优的邻域有较好的表现。但是对于同一种网络而言，网络拓扑性质的差异程度究竟会对 PSO 结果有多大影响呢？本文仍以 SFL 网为例，以平均度作为衡量网络具体拓扑性质差异性的一个指标，对 PSO 粒子寻优效果进行分析。网络的平均度指标刻画的是网络拓扑的总体结构，下面对基于不同平均度的 SFL 网邻域拓扑的 PSO 效果进行分析。对 Rosenbrock 和 Rastrigrin 函数进行多次实验(500 次重复独立的随机实验)，得出如下结果：随着平均度的增加，2 个目标函数 PSO 寻优的最终适应值变化幅度并不大，但都会有一个最优的平均度值范围。在这个平均度取值范围内，网络上粒子的寻优效果将更佳。

6 结束语

本文对基于 SFL 网络拓扑邻域的 PSO 进行了改进，并利用 4 个函数对其进行测试，结果证明，粒子基于 SFL 网络邻域拓扑的寻优效果比全局搜索好，收敛速度更快，效率更高，且不容易陷入局部最优解。并对比了 SFL 网、STAR 网、CYCLE 网和 ER 网等网络邻域拓扑下 PSO 的寻优效果，证实了 STAR 网下粒子的寻优效果最差，而 SFL 下粒子寻优的综合表现最好。对于具体的 SFL 网，其不同的网络拓扑特征如平均度会影响 PSO 寻优的效果，因此，在采取以 SFL 网对 PSO 进行相关改进时应采用适当的网络特征作参照(本文以平均度作为衡量的指标)。(下转第 23 页)