第36卷 第19期 计 算 机 工 程 2010年10月
Vol.36 No.19 Computer Engineering October 2010
·人工智能及识别技术· 文章编号：1000—3428(2010)19—0182—03 文献标识码：A 中图分类号：TP18

# 基于非对称学习因子调节的粒子群优化算法

毛开富，包广清，徐 驰
(兰州理工大学电气工程与信息工程学院，兰州 730050)

**摘 要：**分析粒子群优化算法中2个学习因子对粒子收敛性的影响，通过Benchmark标准测试函数对不同取值的学习因子进行测试，提出一种基于非对称学习因子调节策略的改进粒子群算法。在搜索初期使粒子获得更好的多样性及较强的摆脱局部极值的能力，在搜索后期加快粒子的收敛速度，提高全局寻优能力。该算法已在复合齿轮传动系统的传动比优化设计中得到了成功应用。

**关键词：**粒子群优化算法；学习因子；测试函数；复合齿轮传动比优化

# Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Non-symmetric Learning Factor Adjusting

**MAO Kai-fu, BAO Guang-qing, XU Chi**
(College of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

**【Abstract】** To update the performance of the standard optimization method, a new Particle Swarm Optimization(PSO) algorithm is proposed based on the earlier works. A non-symmetric learning factor adjusting method introduced here is to keep the balance between the global search and the local search with the great advantages of convergence property and robustness compared with standard PSO algorithm. The relationship between swarm average velocity and convergence is studied through Benchmark test functions simulation. All the merits mentioned above are demonstrated by the compound gear transmission ratio optimization in transmission systems.

**【Key words】** Particle Swarm Optimization(PSO) algorithm; learning factor; test function; compound gear transmission ratio optimization

## 1 概述

粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization, PSO)是Kennedy博士和Eberhart博士于1995年提出的一种图形化仿真鸟群飞行的演化算法[1-2]，起源于对鸟群觅食行为的研究。PSO算法最初应用于函数优化和神经元网络的训练过程，其后又应用于工程优化设计等领域，均取得了较好的效果[3-4]。PSO算法参数简单、容易实现且优化性能良好，受到国内外学者的广泛关注。

与其他随机类优化算法相比，PSO算法虽然在搜索初期的收敛速度快，但在后期却易于陷入局部最优，尤其当解空间为非凸集时，表现得更加明显。针对这一问题，近年来出现了许多改进算法，本文在文献[2,5]的基础上，对2个学习因子$c1$、$c2$的取值范围进行修正，并通过其在优化过程中的非对称变化提高优化精度。

仿真实验表明，本文提出的学习因子调节方法明显优于文献[5]的方法，对Benchmark测试函数优化可以得到较好的适应值，同时在复合齿轮传动系统的传动比优化设计中进行实际验证，说明了该算法的有效性。

## 2 PSO算法介绍

对PSO算法的基本原理简述如下[6]：由$m$个粒子组成的群体在$D$维寻优空间以一定速度运动，每个粒子在决策搜索路径时，要同时参考自己搜索的历史最好点(个体极值)和群体内其他粒子的历史最好点(全局极值)。设第$i$个粒子在寻优空间的位置为$x_i=(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{iD})$，其运动速度为$v_i=(v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{iD})$, $1\leq i\leq m$；第$i$个粒子历经的历史最好点为$p_i=(p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{iD})$，群体内所有粒子历经的最好点表示为$p_g=(p_{g1}, p_{g2}, \cdots, p_{gD})$。粒子的位置和速度分别根据式(1)、式(2)进行调节：

$$\boldsymbol{v}_{iD}^{k+1}=wv_{iD}^{k}+c_1\varepsilon(p_{iD}^{k}-x_{iD}^{k})+c_2\eta(p_{gD}^{k}-x_{iD}^{k}) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{x}_{iD}^{k+1}=x_{iD}^{k}+v_{iD}^{k+1} \tag{2}$$

其中，$w$是惯性权重，通常取值为(0, 1)之间的随机数；$c1$和$c2$是学习因子；$\varepsilon,\eta$是个体极值和全局极值间的均衡因子，取值为[0, 1]区间内的随机数。迭代终止条件一般选为最大迭代次数和粒子群迄今为止搜索到的最优位置满足的适应阈值。

## 3 PSO算法收敛性分析

从式(1)、式(2)可以看出，$\boldsymbol{v}_{iD}^{k+1}$、$\boldsymbol{x}_{iD}^{k+1}$是多维变量矩阵，且各行变量线性无关，故对算法分析可以简化到一维进行，并假设粒子个体找到的最优解位置和整个种群目前找到的最优解位置不变，分别记为$p_b$和$gb$，$w$、$c1$和$c2$为常数。式(1)和式(2)可简化为[7]：

$$v(k+1)=wv(k)+c_1(p_b-x(k))+c_2(g_b-x(k)) \tag{3}$$

$$x(k+1)=x(k)+v(k+1) \tag{4}$$

由式(3)、式(4)得到：

$$v(k+2)=wv(k+1)+c1(p_b-x(k+1))+c2(g_b-x(k+1)) \tag{5}$$

**基金项目：**国家自然科学基金资助项目(50877034)
**作者简介：**毛开富(1964-)，男，副教授，主研方向：智能控制算法及其应用；包广清，博士；徐 驰，本科生
**收稿日期：**2010-03-20 **E-mail：**guangqing.bao@gmail.com

$$x(k+2)=x(k+1)+v(k+2) \tag{6}$$

把式(5)和式(4)代入式(6)得到：

$$x(k+2)=x(k+1)+v(k+2)=(w-c1-c2+1)x(k+1)-wx(k)+c1p_b+c2g_b$$

即：

$$x(k+2)+(-w+c1+c2-1)x(k+1)+wx(k)=c1p_b+c2g_b \tag{7}$$

这是二阶非齐次常系数差分方程，其特征方程为：

$$\lambda^2+(-w+c1+c2-1)\lambda+w=0 \tag{8}$$

定义：

$$\Delta=(-w+c1+c2-1)^2-4w \tag{9}$$

令 $c=c1+c2$，具体有 $\Delta=0$、$\Delta>0$ 和 $\Delta<0$ 这 3 种情况：

(1) $\Delta=0$

$$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=-(-w+c1+c2-1)/2$$

$$x(k)=(A_0+A_1k)\lambda^k$$

$$A_0=x(0)$$

$$A_1=\frac{(1-c)x(0)+wv(0)+c1p_b+c2g_b}{\lambda}-x(0)$$

(2) $\Delta>0$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-(-w+c1+c2-1)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$x(k)=A_0+A_1\lambda_1^k+A_2\lambda_2^k$$

$$A_0=\frac{c1p_b+c2g_b}{c}$$

$$A_1=\frac{\lambda_2(x(0)-A_0)-(1-c)x(0)-wv(0)-c1p_b-c2g_b+A_0}{(1-c)x(0)+wv(0)+c1p_b+c2g_b-x(0)}$$

$$A_2=\frac{(1-c)x(0)+wv(0)+c1p_b+c2g_b-A_0-\lambda_1(x(0)-A_0)}{(1-c)x(0)+wv(0)+c1p_b+c2g_b-x(0)}$$

(3) $\Delta<0$

$$\lambda_{1,2}=\frac{w-c1-c2+1\pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$x(k)=A_0+A_1\lambda_1^k+A_2\lambda_2^k$$

$$A_0=\frac{c1p_b+c2g_b}{c}$$

$$A_1=\frac{\lambda_2(x(0)-A_0)-(1-c)x(0)-wv(0)-c1p_b-c2g_b+A_0}{(1-c)x(0)+wv(0)+c1p_b+c2g_b-x(0)}$$

$$A_2=\frac{(1-c)x(0)+wv(0)+c1p_b+c2g_b-A_0-\lambda_1(x(0)-A_0)}{(1-c)x(0)+wv(0)+c1p_b+c2g_b-x(0)}$$

当 $k\to\infty$时，$x(k)$有极限，表示迭代收敛。由此可知，$x(k)$收敛的条件是：$\|\lambda_1\|<1$且$\|\lambda_2\|<1$。

(1) 当 $\Delta=0$ 时，收敛区域为：抛物线，$w^2+c^2-2wc-2w-2c+1=0$，且$0\le w<1$；

(2) 当 $\Delta>0$ 时，收敛区域为：$w^2+c^2-2wc-2w-2c+1>0$、$c>0$和$2w-c+2>0$所围成的区域；

(3) 当 $\Delta<0$ 时，收敛区域为：$w^2+c^2-2wc-2w-2c+1<0$和$w<1$所围成的区域。

综合以上 3 种情况，收敛域为如图 1 所示的 $w<1$、$c>0$ 和 $2w-c+2>0$ 所围成的区域。

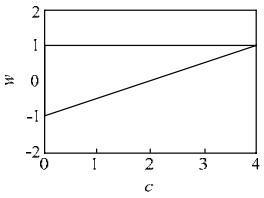


**图 1　PSO 收敛区域**

## 4　学习因子线性变化的粒子群算法

在经典 PSO 算法中，由于在寻优后期粒子缺乏多样性，易过早收敛于局部极值[7]，因此通过调节学习因子，在搜索初期使粒子进行大范围搜索，以期获得具有更好多样性的高质量粒子，尽可能摆脱局部极值的干扰。

学习因子 $c1$ 和 $c2$ 决定粒子个体经验信息和其他粒子经验信息对寻优轨迹的影响，反映了粒子之间的信息交换。设置较大的 $c1$ 值，会使粒子过多的在局部搜索；反之，较大的 $c2$ 值会使粒子过早收敛到局部最优值。因此，在算法搜索初期采用较大的 $c1$ 值和较小的 $c2$ 值，使粒子尽量发散到搜索空间即强调“个体独立意识”，而较少受到种群内其他粒子即“社会意识部分”的影响，以增加群内粒子的多样性。随着迭代次数的增加，使 $c1$ 线性递减，$c2$ 线性递增，从而加强了粒子向全局最优点的收敛能力：

$$c1=c_{1i}-k\times(c_{1f}-c_{1i})/k_{\max} \tag{10}$$

$$c2=c_{2i}+k\times(c_{2f}-c_{2i})/k_{\max} \tag{11}$$

其中，$k$ 为当前迭代次数；$k_{max}$ 是最大迭代数；$c_{1i}$、$c_{2i}$ 分别为 $c1$、$c2$ 的初始值；$c_{1f}$、$c_{2f}$ 分别为 $c1$、$c2$ 的最终值。

根据上述收敛性分析，在迭代过程中 $w$ 值从 1 线性递减到 0.4，参数 $c1$ 和 $c2$ 在满足 $c=c1+c2\le4$ 的条件下，有 3 种取值情况：

(1)$c1$ 和 $c2$ 是常数且 $c1=c2$。表示“个体”与“群体”对粒子搜索过程的影响力相同。

(2)$c1$ 和 $c2$ 是对称的线性变化关系。即 $c_{1i}=c_{2f}$ 且 $c_2=c_{1f}$，表示“个体”与“群体”对搜索过程起完全互补的作用，这是经典 PSO 的思想。

(3)$c1$ 和 $c2$ 是非对称的线性变化关系。即 $c_{1i}\ne c_{2f}$ 且 $c_{2i}\ne c_{1f}$，表示“个体”与“群体”对搜索过程具有不同程度的影响，这也是本文的改进 PSO 算法。

## 5　仿真实验

不同于文献[5]中对 $c1$、$c2$ 对称取值，本文对 $c1$、$c2$ 采用非对称取值，通过 4 种非对称取值情况的比较分析，最终确定学习因子的最佳取值区间。本文选择式(12)、式(13) 2 种典型函数最小值优化问题来测试上述 3 种 $c1$、$c2$ 调节算法的性能。$f_1(x)$是单峰函数，$f_2(x)$是多峰函数，两者均在(0,0,0)处有全局最小值 0。

$$f_1(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \tag{12}$$

$$f_2(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-10\cos(2\pi x_i)+10) \tag{13}$$

图 2 和图 3 分别是 2 个函数在不同学习因子下的平均适应度变化曲线，曲线 1 是 $c1$、$c2$ 取固定值，且 $c1=c2=2$，曲线 2 是 $c1$、$c2$ 非对称变化，且 $c1$=2.5-0.5，$c2$=0.7-2.7，曲线 3 是 $c1$、$c2$ 非对称变化，且 $c1$=2.7-0.7，$c2$=0.5-2.5，曲线 4 是 $c1$、$c2$ 对称变化，且 $c1$=2.5-0.5，$c2$=0.5-2.5，曲线 5 是 $c1$、$c2$ 非对称变化，且 $c1$=2.25-1.0，$c2$=0.5-2.5，曲线 6 是 $c1$、$c2$ 非对称变化，且 $c1$=2.5-0.5，$c2$=1.0-2.25，图中横坐标是迭代次数，纵坐标是适应度的对数表示。

从图 2 和图 3 的仿真结果整体来看，基于非对称变化学习因子的 PSO 寻优能力高于对称变化学习因子的 PSO 寻优能力。当学习因子保持恒定 $c1=c2=2$ 时，由于固定学习因子的局限性，算法的收敛速度明显不如变化的学习因子，甚至在单峰函数的寻优过程中过早陷入局部收敛，无法找到全局最优点。对单峰优化函数 $f_1(x)$来说，曲线 6 的适应度最佳；

对多峰优化函数 $f_2(x)$来说，曲线 3 的适应度最佳。曲线 6 和曲线 3 的共同之处是在迭代过程中，$c1$ 初期取值较大，强调个体的大范围搜索，较好保持了种群的多样性。随着迭代次数增加，使 $c1$ 的下降率高于 $c2$ 的上升率，以此相对加强个体经验对寻优过程的影响，避免在迭代后期的不成熟收敛。

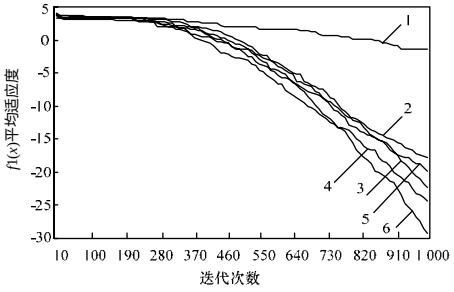


**图 2　$f_1(x)$的平均适应度曲线**

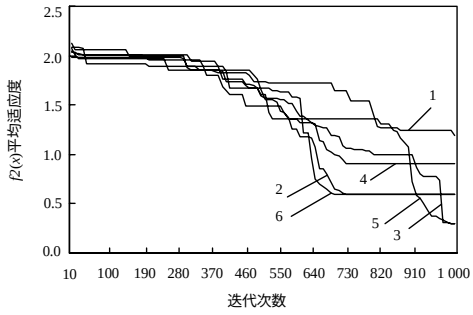


**图 3　$f_2(x)$的平均适应度曲线**

综合以上分析，基于 $c1$=2.5-0.5，$c2$=1.0-2.25 的非对称学习因子调节策略与文献[5]的对称调节以及学习因子固定取值的方法相比，均有较为明显的改善，表现出较好的全局寻优能力。

## 6　应用实例

为进一步验证上述算法的有效性，本文将这种非对称取值的 PSO 算法用于如图 4 所示的复合齿轮传动系统中传动比的优化设计问题。

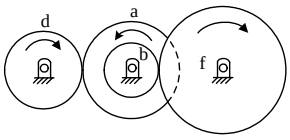


**图 4　传动齿轮设计**

齿轮传动比定义为输出轴的角速度与输入轴的角速度之比。为了获得期望的总传动比，复合齿轮传动系统由 2 对齿轮构成，d-a 和 b-f。在输入轴和输出轴之间，总的传动比 $i_{\text{tot}}$ 可以用下式表示：

$$i_{\text{tot}}=\frac{w_{\text{o}}}{w_{\text{i}}}=\frac{z_{\text{d}}z_{\text{b}}}{z_{\text{a}}z_{\text{f}}} \tag{14}$$

其中，$w_{\text{o}}$、$w_{\text{i}}$ 分别是输出轴和输入轴的角速度，$z_{\text{d}}$、$z_{\text{b}}$、$z_{\text{a}}$、$z_{\text{f}}$ 分别是齿轮 d、b、a、f 的齿数。根据工程实际经验，期望传动比尽量接近 $1/6.931\approx 0.1443$，并且每个齿轮的齿数在 12~60 之间，以 4 个齿轮的齿数为优化变量，则优化问题可表示为：

$$\min f=\left(\frac{1}{6.931}-\frac{x_1x_2}{x_3x_4}\right)^2,\ 12\le x_i\le 60,\ i=1,2,\cdots,4 \tag{15}$$

需要注意的是，上式中的各变量对应齿轮的齿数。因此，优化结果还应该进行取整处理。

对比分析 $c1$、$c2$ 在上述 6 种取值条件下的优化结果，$c1$=$c2$=2 固定取值的情况下优化性能最差，最优适应度值 $minf$=2.5×10$^{-4}$；而在 $c1$、$c2$ 的对称线性变化情况下，其初始值和最终值设置也对优化的结果有直接的影响，该实例表明，基于 $c1$=2.5-0.5、$c2$=1.0-2.25 的非对称学习因子调节策略可以获得最优结果，最优适应度值 $minf$=2.7×10$^{-12}$。另外还应该指出，根据对称性，在优化目标函数式(15)的过程中，可以得到以下 4 种有效的不同优化结果：

$$\boldsymbol{X}_1=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\text{T}}=[16,19,43,49]^{\text{T}}$$

$$\boldsymbol{X}_2=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\text{T}}=[19,16,43,49]^{\text{T}}$$

$$\boldsymbol{X}_3=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\text{T}}=[16,19,49,43]^{\text{T}}$$

$$\boldsymbol{X}_4=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\text{T}}=[16,19,49,43]^{\text{T}}$$

这充分说明，本文提出的 PSO 算法不仅仅只适用于单一目标优化过程，在多目标优化中也同样适用。

## 7　结束语

本文介绍的动态线性非对称调整学习因子的粒子群算法，通过在搜索之初加强 PSO 模型中的“个人认知部分”以增加粒子群内的多样性，在搜索后期加强“社会认知部分”以加快粒子向全局最优点的收敛速度，由于两者的调整程度不同，从而比传统 PSO 算法的搜索性能有所改善。Benchmark 函数的数字仿真与复合齿轮传动系统的齿轮传动比优化设计表明，改进的 PSO 算法对单峰及部分多峰函数的较成熟收敛具有较为明显的改进。当然，要进一步改进优化效果，可以综合考虑学习因子分段线性变化或与惯性权重线性递减等方法相结的 PSO 算法，这些将在后续的研究工作中继续进行。

## 参考文献


[1] 周慕逊, 王正初, 罗云霞, 等. 基于 MAPSO 算法的水库优化调度与仿真[J]. 计算机工程, 2008, 34(12): 189-191.

[2] Kenneay J, Eberhart R, Shi Yuhui. Swarm Intelligence[M]. San Francisco, USA: Morgan Kaufman, 2001.

[3] 金义雄, 程浩忠, 严健勇, 等. 基于局优分支优化的粒子群收敛保证算法及其在电网规划中的应用[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(23): 12-14.

[4] 李洪奇, 李　莉, 谢绍龙. 基于粒子群算法的声波测井岩心自动归位[J]. 计算机工程, 2009, 35(3): 217-221.

[5] Ratnaweera A, Halgamuge S. Self-organizing Hierarchical Particle Swarm Optimizer with Time Varying Acceleration Coefficients[J]. Evolutionary Computation, 2004, 8(3): 240-255.

[6] 汪定伟, 王俊伟. 智能优化算法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[7] 高　尚, 汤可宗, 蒋新姿, 等. 粒子群优化算法收敛性分析[J]. 科学技术与工程, 2006, 6(12): 1625-1627.



编辑　金胡考