

# 基于新局域世界的 BBV 网络模型演化研究

周 健<sup>a</sup>, 潘家鑫<sup>b</sup>, 程克勤<sup>a,b</sup>

(合肥工业大学 a. 信息与网络中心; b. 计算机与信息学院, 合肥 230009)

**摘 要:** 在 BBV 加权无标度模型演化过程中, 节点加入时选取的是整个网络, 而实际复杂网络中只有小部分节点能够获得全局网络的信息, 大部分节点只能获取局部网络的信息。针对该问题, 提出一个新局域的 BBV 加权网络模型, 将新局域世界模型引入 BBV 模型中。理论分析及仿真实验结果表明, 该模型节点强度具有幂律分布的特性, 且幂律指数可以通过参数的修改在区间[1,3]内进行调节。

**关键词:** 复杂网络; BBV 模型; 新局域世界; 幂律

## Research on BBV Network Model Evolving Based on New Local-world

ZHOU Jian<sup>a</sup>, PAN Jia-xin<sup>b</sup>, CHENG Ke-qin<sup>a,b</sup>

(a. Information and Network Center; b. School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**【Abstract】** In the process of BBV weighted scale-free network evolving, the new nodes obtain the entire networks when the new nodes are added to networks. But in some real complex networks, only a few nodes can obtain the global information, most of the nodes own only obtain local information of the networks. The new local-world model is introduced into BBV, and the new local-world BBV weighted network model is proposed. According to theoretical analysis, the strength of nodes of this network model obeys power-law, and the exponent of power-law can be adjusted between 1 and 3 through controlling the parameters. Furthermore, the results of the simulation are in agreement with the theoretical analysis.

**【Key words】** complex networks; BBV model; new local-world; power-law

### 1 概述

自从有学者发表关于无标度网络<sup>[1]</sup>的开创性工作以来, 在科学与工程以及其他各个领域掀起一轮关于复杂网络研究的热潮。但到目前为止, 大多数研究工作都是关于无权网络的。Barabasi A L 和 Albert R(BA)提出的无标度网络及其各种变种是最具代表性的无权网络。虽然可以反映网络节点之间简单的连接方式和主要相互作用的特性等信息, 但还是不能反映实际网络节点之间相互作用的强度和连边多样性和差异性。

在很多实际网络中, 网络各个节点之间是具有不同权值的。如在科研合作网络中, 各个研究者之间合作的论文数量是不同的; 在 Internet<sup>[2]</sup>或通信网络中, 各个连接的流量存在着很大的差别, 主干网和非主干网之间的流量差别非常大; 在航空、铁路、公路网络中, 各个节点之间的客流量具有显著的区别。例如航空网中 2 个大城市之间航线数量明显多于其他小城市之间。显然, 这些网络用各个连接间具有不同权值的加权网络模型来描述更适合。

研究表明, 这些实际的加权网络的节点权重、度、边权都满足幂律分布。其幂律分布即为  $P(s) \propto s^{-\lambda}$ , 其中指数值  $\lambda$  在文献[2-3]之间, 与大部分网络相符合。根据这一特性, Barrat、Barthélemy 和 Vespignani 提出了一个加权无标度网络模型, 称 BBV 模型<sup>[3]</sup>。该模型综合考虑了网络结构和节点的权重等因素来研究网络的动态演化情况。BBV 模型具有结构简单且易于作理论分析的特点。随着模型规模的增大, BBV 模型网络的度、边权值和节点的权重都呈现无标度

特性。

BBV 模型给加权网络的研究奠定了良好的基础, 但是实际网络中节点的加入的规则与 BBV 模型的演化规则存在着差异。例如在互联网中, 一个节点(主机)加入到网络中时, 这个节点(主机)一般仅仅能获取局部路由节点的信息。而一个 Internet 骨干网的节点却几乎能获取到全局网络节点的信息。

本文在 BBV 模型的基础上, 引入新局域世界模型<sup>[4]</sup>, 理论分析发现能够较好地应用在 BBV 加权无标度网络中。

### 2 BBV 模型及新局域世界模型

#### 2.1 BBV 模型

设  $w_{ij}$  表示节点  $i$  和  $j$  之间边的权重, 一个  $N \times N$  的加权网络可以用网络的连接权重矩阵( $w_{ij}$ )表示, 其中  $i, j=1, 2, \dots, N$ , 这里  $N$  为网络的规模, 即节点总数。本文考虑的是无向网络, 因而权重矩阵是对称的, 即  $w_{ij} = w_{ji}$ 。另外还认为网络是无自环的, 有  $w_{ii}=0$ 。

将无权网络中的节点的连接度的概念引入到加权网络中来, 即节点的权重(又称为强度)  $s_i$  定义为:

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目“基于复杂网络理论的网络安全量化评估模型研究”(60873194)

**作者简介:** 周 健(1960 - ), 男, 副教授, 主研方向: 复杂网络, 计算机网络与信息安全; 潘家鑫, 硕士研究生; 程克勤, 助理研究员

**收稿日期:** 2010-01-02 **E-mail:** jxpan85@gmail.com

$$s_i = \sum_{j \in \tau(i)} w_{ij}$$

其中,  $\tau(i)$  表示节点  $i$  的邻居节点组成的集合。

BBV 模型演化的 3 个步骤:

(1) 初始设定

给定  $m_0$  个节点, 它们组成一个全耦合网络, 其中每条边都赋予权值  $w_0$

(2) 增长

每次加入一个新节点  $n$ , 让这个节点与之前的  $m$  个节点相连, 因此每次新加入了  $m$  条边。连接节点的选择按照权重优先选择(strength driven attachment)进行, 即一个老节点  $i$  被选择的概率为:

$$\Pi = \frac{s_i}{\sum_j s_j}$$

也就是权重越大的节点被选中的概率越大。

(3) 边权值的动态演化

每次新加入的边  $(n, i)$  都赋予一个权值  $w_0$ 。为了简单起见, 认为新加入的边只会局部引发连接节点  $i$  与它的邻居节点  $j \in \tau(i)$  边的权值重新调整。调整按照

$$w_{ij} \rightarrow w_{ij} + \Delta w_{ij}$$

$$\Delta w_{ij} = \delta_i \frac{w_{ij}}{s_i}$$

规则进行。也就是每次新引入一条边  $(n, i)$ , 会给节点  $i$  带来额外的  $\delta_i$  的流量负担, 而与之相连的边会按他们自身的权值  $w_{ij}$  的大小分担一定的流量。因此, 总的节点  $i$  的权重调整为:

$$s_i \rightarrow s_i + \delta_i + \omega_0$$

## 2.2 新局域世界模型

新局域世界模型是由覃森和戴冠中<sup>[4]</sup>根据 LW 模型(局域世界网络演化模型)而提出的。在模型中, 新加入节点获取全部网络信息的概率设为  $\theta$ , 其中,  $\theta \in [0, 1]$ 。当  $\theta=0$  时, 节点不能获取全部网络信息, 即为 LC 模型。当  $\theta=1$  时, 节点获取的是全部网络信息, 即为 BA 模型。也就是说, 此模型可以较好的符合现实的情况。

模型的演化构造算法如下:

(1) 初始设定

网络初始时, 具有  $m_0$  个节点和  $e_0$  条边。

(2) 增长

每次加入一个节点具有  $m$  条边。

1) 如果新节点获取的是全部网络的信息, 新节点将依据老节点的度的大小进行优先连接。即一个老节点被选中的概率为:

$$\Pi_{Global}(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

2) 如果新节点获取的是局域网络的信息, 随机地从网络中已有节点中选取  $M$  个节点 ( $M = m$ ), 作为新加入节点的局域世界。新加入的节点根据优先连接概率

$$\Pi_{Local}(k_i) = \prod_{(i \in Local)} \frac{k_i}{\sum_{j \in Local} k_j}$$

来进行与局域世界中的  $m$  个节点相连, 其中:

$$\prod_{(i \in Local)} = \frac{M}{t + m_0}$$

## 3 理论分析

根据新局域世界模型的演化特性, 把它应用于 BBV 模型。网络的初始具有  $m_0$  个节点, 且是全耦合的。为了简单起见, 设  $w_0=1$ 。模型的演化算法。

(1) 初始设定: 给定一个具有  $m_0$  个节点, 他们组成全耦合的网络,  $w_0=1$ 。

(2) 增长: 每个时刻  $t$ , 引入一个节点, 而具有  $m$  条边:

1) 如果新节点获取的是全部网络的信息, 新节点将依据老节点的权重的大小进行优先连接。即一个老节点被选中的概率为:

$$\Pi_{Global}(s_i) = \frac{s_i}{\sum_j s_j}$$

2) 如果新节点获取的是局域网络的信息, 随机地从网络中已有节点中选取  $M$  个节点 ( $M = m$ ), 作为新加入节点的局域世界。新加入的节点根据优先连接概率

$$\Pi_{Local}(s_i) = \prod_{(i \in Local)} \frac{s_i}{\sum_{j \in Local} s_j}$$

来进行与局域世界中的  $m$  个节点相连, 其中:

$$\prod_{(i \in Local)} = \frac{M}{t + m_0}$$

因此, 由上面的模型演化算法可得到, 节点权重  $s_i$  随着时间  $t$  的变化为:

$$\begin{aligned} \frac{ds_i}{dt} = & \theta m \frac{s_i}{\sum_j s_j} (1 + \delta) + \sum_{j \in \tau(i)} m \frac{s_j}{\sum_l s_l} \delta \frac{w_{ij}}{s_j} + \\ & (1 - \theta) \frac{M}{m_0 + t} \left( m \frac{s_i}{\sum_{j \in Local} s_j} (1 + \delta) + \right. \\ & \left. \sum_{k \in \tau(i)} m \frac{s_k}{\sum_{j \in Local} s_j} \delta \frac{w_{ik}}{s_k} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

显而易见, 当新节点获取的是局域网络的信息时, 在  $t$  时刻,  $m = M = m_0 + t$ 。因此上述的模型具有 3 种情况。

(1) 特殊情况 A:  $M = m_0 + t$

这时, 每个新节点选择的局域世界即整个网络。因此此时的模型也就等价于 BBV 模型。

(2) 特殊情况 B:  $M = m$

这时, 每个新节点与局域世界中的每一个节点进行连接, 这意味着在网络增长过程中, 优先连接的原则已经不再发挥了, 只保留着增长机制。另外, 为了简单起见, 边权值的演化仅限制于局域世界的内部。

因此, 由(1)可得出的  $s_i$  的变化。其中:

$$\sum_{j \in Local} s_j = \langle s_i \rangle M \approx (2m(1 + \delta)t / (t + m_0))M$$

$\langle s_i \rangle$  表示整个网络的平均权值。

$$\begin{aligned} \frac{ds_i}{dt} = & \theta \frac{2\delta + 1}{2\delta + 2} \frac{s_i(t)}{t} + (1 - \theta) \frac{m}{m_0 + t} \approx \\ & \theta \frac{2\delta + 1}{2\delta + 2} \frac{s_i(t)}{t} + \frac{(1 - \theta)m}{t} = \\ & \frac{\theta(2\delta + 1)s_i(t) + (1 - \theta)m(2\delta + 2)}{(2\delta + 2)t} \end{aligned}$$

得出  $s_i(t) \sim (t/i)^a$ ,  $a = \theta \frac{2\delta + 1}{2\delta + 2}$ ,  $P(s) = s^{-\lambda}$ , 幂律分布指

数  $\lambda^{[5]}$  为  $\lambda = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{2\delta + 2}{\theta(2\delta + 1)}$ 。此时幂律分布指数  $\lambda$  的范围

是[2,+ ]。表明此时网络仍然具有无标度的特性。可以对参数进行调节,这对幂律指数的控制具有一定的意义。

(3)当  $m < M < m_0 + t$  时

当新节点获取的是局域世界节点时,从网络选取  $M$  个节点作为局域世界。一方面,当节点获取的是全局信息的概率为  $\theta$ ,节点的平均权重可以近似为  $\langle s_i \rangle = 2mt(1+\delta)/(m_0+t)$ 。另一方面,当节点获取的是局域世界的网络信息时,为了不是一般性,节点的平均权重为  $m$ 。所以,

$$\sum_j Local s_j = [\theta \langle s_i \rangle + (1+\theta)]M$$

带入式(1)得到:

$$\frac{ds_i}{dt} = \left[ \theta \frac{2\delta+1}{2\delta+2} + \frac{(1-\theta)(2\delta+2)}{2\theta(1+\delta)+1-\theta} \right] \frac{s_i(t)}{t}$$

$$\text{可得 } a = \theta \frac{2\delta+1}{2\delta+2} + \frac{(1-\theta)(2\delta+2)}{2\theta(1+\delta)+1-\theta}$$

同理,

$$P(s) = s^{-\lambda}$$

$$\lambda = 1 + \frac{1}{a} = \frac{(2\delta+1)^2\theta^2 + (2\delta+1)\theta + (2\delta+2)^2}{(2\delta+1)^2\theta^2 - (2\delta+1)^2\theta + (2\delta+2)(2\delta+1)}$$

分析上式:

(1)当  $\theta=1$  时,幂律分布指数  $\lambda = \frac{4\delta+3}{2\delta+1}$ 。进行分析可知,  $\theta=1$ ,新节点获取的是全部网络信息,所以也就是 BBV 模型。

(2)当  $\delta=0$  时,幂律分布指数  $\lambda = \frac{\theta^2 + \theta + 4}{\theta^2 - \theta + 2}$ 。

进行分析可知,当  $\delta=0$  时,边权值不进行演化,也就是非加权网络。所以,可得出一个非加权无标度网络,且分布指数可调。这对非加权无标度网络研究,也存在着有用的价值。

在其他情况下,该模型是一个加权无标度的网络,同时节点的权重  $s$  也是服从幂律分布。其中可以得出,节点  $s$  的幂律分布为  $P(s) = s^{-\lambda}$ ,幂律分布指数  $\lambda$  的范围为<sup>[1-3]</sup>。该模型的调节范围可以更大一些,可以应用到更多的复杂网络的理论模型中去。

另一方面从模型的演化过程中可以看出,节点的权重演化与局域世界加权网络模型中的权重的演化存在着区别。不再是由近似指数分布逐渐转变为幂律分布,而均是幂律分布。只是在幂律分布指数调节上存在着差别。

#### 4 实验仿真及分析

根据对新局域世界 BBV 模型的理论分析,节点的权重服从幂律分布。对此进行仿真模拟,如图 1、图 2 所示。可以看出,仿真实验与理论分析结果吻合。在图 1 中,  $M=20$ ,保持  $\delta$  不变,通过调节参数  $\theta$ ,即获取全局网络信息的概率,从中来观察其变化对网络的特性的影响。可以看出对网络的幂律分布指数影响比较小。在图 2 中,同样  $M=20$ ,保持  $\theta$  不变,通过调节参数  $\delta$ ,即 BBV 模型中引入的额外负担。明显可以发现对网络的影响比较大。这与理论以及实际中复杂网络特性也相吻合。

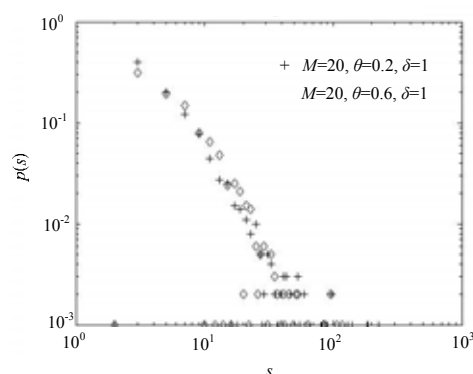


图 1 节点数为 2 000 时,  $\theta$  变化对权重的影响

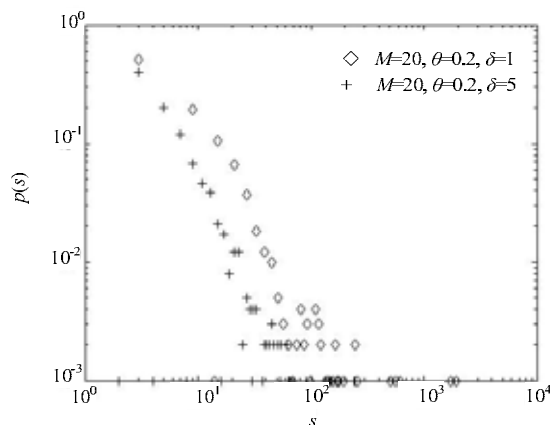


图 2 节点数为 2 000 时,  $\delta$  变化对权重的影响

#### 5 结束语

本文根据新局域世界模型中提出的关于节点按比率来获取全局网络的信息的特点,把这一特点应用到 BBV 加权无标度网络中。模型的演化分为 2 种情况,当节点获取的是全局网络信息时,按照权重优先进行连接;当节点获取的局域世界信息时,节点是仅限于局域世界  $M$  内的权重优先进行连接。通过理论分析可得出,节点的权重服从幂律分布,同时分布指数还可以进行调节。这一特点能较好地反映一些复杂网络的特性,如 Internet 网络,所以能较好地模拟出网络的特性。

#### 参考文献

- [1] Albert R, Barabási A L. Emergence of Scaling in Random Networks[J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.
- [2] Romualdo P S, Alessandro V. Evolution and Structure of the Internet: A Statistical Physics Approach[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [3] Barrat A, Barthelemy M, Vespignani A. Weighted Evolving Networks: Coupling Topology and Weighted Dynamics[J]. Phys. Rev. Lett., 2004, 92(22).
- [4] Qin Sen, Dai Guanzhong. A New Local-world Evolving Network Model[J]. Chinese Phys B, 2009, 18(2): 383-390.
- [5] Dorogovtsev S N, Mendes J F F. Structure of Growing Networks with Preferential Linking[J]. Phys. Rev. Lett., 2000, 85(21): 4633-4636.

编辑 陈 文