

一种改进的快速全局运动估计算法

刘磊, 王志良, 刘冀伟, 石志国

(北京科技大学信息工程学院自动化系, 北京 100083)

摘要: 结合两步法与传统梯度下降算法, 提出一种改进的快速全局运动估计算法。采用稀疏抽样的 MSEA 快速块匹配算法估计局部运动矢量, 使用迭代最小二乘法粗估计全局运动参数并排除外点(前景宏块), 在排除外点的采样宏块集上选取特征像素, 以上两步法的全局运动估计参数为初始值, 利用 LM 梯度下降算法对全局运动参数进行优化。实验结果表明, 改进算法的估计速度达到 11.42 ms/f, 比 FFRGMET 算法快 1.3 倍, 具有更高的全局运动估计精度。

关键词: 全局运动估计; 梯度下降算法; 块匹配算法; 迭代最小二乘

Improved Fast Global Motion Estimation Algorithm

LIU Lei, WANG Zhi-liang, LIU Ji-wei, SHI Zhi-guo

(Department of Automation, College of Information Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

【Abstract】 This paper presents an improved fast Global Motion Estimation(GME) algorithm by combining with two-step method and traditional Gradient Descent(GD) algorithm. Sparsely sampling MSEA(Multilevel Successive Elimination Algorithm) fast Block Matching Algorithm(BMA) is used to get local motion vectors. Iterative Least Square(ILS) method is used to get rough estimation of the global motion parameters and excludes outliers(foreground macro-blocks). The rough global motion parameters is used as initial value and LM(Levenberg-Marquardt) GD optimization method is used on the feature pixels which are selected from the residual sampled blocks that have been excluded outliers with ILS. Experimental results validate that the estimation speed of improved algorithm reaches 11.42 ms/f, it is 1.3 times faster than FFRGMET algorithm, and it gets higher GME precision.

【Key words】 Global Motion Estimation(GME); Gradient Descent(GD) algorithm; Block Matching Algorithm(BMA); Iterative Least Square(ILS)

1 概述

全局运动估计是指为拍摄视频序列的摄像机运动建立数学模型并估计模型参数。全局运动估计技术已经广泛应用在视频编码、抖动视频序列的稳定、图像拼接、全景图生成等领域。MPEG4 标准^[1]采用以全局运动估计为基础的全局运动补偿(Global Motion Compensation, GMC)和 Sprite 编码技术。

国内外学者对全局运动估计做了大量研究, 依据参数模型的不同, 全局运动估计可分为二参数模型法、四参数线性放大模型法^[2]、四参数相似性模型法、六参数仿射模型法^[3-4]和八参数透视模型法^[1,5-6]等。根据其研究方法归纳为: 两步法^[2]和基于像素的梯度下降法^[1,3-7]。前者通过块匹配算法(Block Matching Algorithm, BMA)获得局部运动矢量, 然后用迭代最小二乘(Iterative Least Square, ILS)法对局部运动矢量进行处理估计全局运动参数。后者采用梯度下降优化算法使当前帧和参考帧之间的残差平方和最小。文献[3]对三层金字塔式梯度下降算法^[1,5]进行优化, 提出 FFRGMET 全局运动估计技术。本文详细分析基于像素的梯度下降算法与两步法全局运动估计的计算特点, 提出一种新的全局运动估计算法。实验证明了本文算法的快速性、有效性。

2 梯度下降算法的全局运动估计

一般, 描述全局运动的模型参数越多, 精度越高, 估计的计算复杂度也越高。用六参数仿射模型描述全局运动既可以保持很高的精度, 而且其计算复杂度比八参数模型低很多。本文在六参数模型下讨论全局运动估计问题, 六参数模型的表达式如下:

$$\begin{cases} x(i, j) = a \cdot i + b \cdot j + c \\ y(i, j) = d \cdot i + e \cdot j + f \end{cases} \quad (1)$$

其中, (i, j) 为当前帧 I_k 像素坐标; $x(i, j)$ 、 $y(i, j)$ 为对应的参考帧 I_{k-1} 像素坐标; $\lambda = (a, b, c, d, e, f)^T$ 表示参数矢量。定义残差函数:

$$E(\lambda) = \sum_i \sum_j w(i, j) [e(i, j)]^2 \quad (2)$$

其中, $e(i, j) = I_k(i, j) - I_{k-1}(x(i, j), y(i, j))$ 表示像素 (i, j) 的残差。

对式(2)求解待定参数 λ , 使 $E(\lambda)$ 取最小值, 从而得到参数最优估计 ($w(i, j)$ 为权值函数)。由于参数 λ 与残差函数 $E(\lambda)$ 之间是非线性函数关系, 因此求解过程采用 LM (Levenberg-Marquardt) 优化算法。在 LM 优化计算过程求解 Jacobi 矩阵式(3):

$$J(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e(1,1)}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial e(1,1)}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial e(1,1)}{\partial \lambda_6} \\ \frac{\partial e(1,2)}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial e(1,2)}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial e(1,2)}{\partial \lambda_6} \\ \dots & \dots & \dots & \text{all}(i, j) \end{bmatrix} \quad (3)$$

需要当前帧图像的全部像素参与, 优化过程的计算量很大,

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60573059); 国家“863”计划基金资助项目(2007AA01Z160, 2007AA04Z218)

作者简介: 刘磊(1980-), 男, 博士研究生, 主研方向: 图像处理, 计算机视觉, 视频压缩; 王志良, 教授、博士生导师, 刘冀伟, 副教授; 石志国, 讲师

收稿日期: 2010-04-21 **E-mail:** terry2776@gmail.com

全局运动估计速度很慢。因此 MPEG4 校验模型和 FFRGMET 方法采用 3 层金字塔图像模型进行优化计算。在金字塔顶层——低分辨率的图像层，全局运动参数初始值由 3 步搜索法^[8]给出，如 3 步搜索法给出的平移矢量为 (c_0, f_0) ，则为 $\lambda_{\text{start}} = (1, 0, c_0, 0, 1, f_0)$ ；然后用 LM 算法得到一个符合低分辨率图像的最优解的全局运动参数，这样全局运动参数由顶层传递给中间层、中间层传给底层时，迭代寻优计算的初始值是在最优值附近，优化计算能以较少的迭代次数到达最优，从而减少计算量。

3 两步法的全局运动估计

两步法全局运动估计首先把当前帧分成若干宏块，采用块匹配算法得到局部运动矢量，然后用迭代最小二乘法排除局部运动矢量的外点，得到全局运动参数。

3.1 块匹配算法

块匹配算法是经典的局部运动估计算法。BMA 算法以宏块之间的绝对误差和(Sum of Absolute Difference, SAD)或者误差平方和为匹配准则，通过在一定搜索域中找出最佳匹配块计算宏块运动矢量。搜索策略不同，BMA 算法的性能不同。其中，全搜索(Full Search, FS)是最简单最优的块匹配算法。

3.2 迭代最小二乘的计算

对于当前帧图像的 N 个宏块，由 BMA 算法得到其运动矢量场如下：

$$\left\{ \begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_N \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_N \end{matrix} \right\}_N \leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{matrix} \right\}_N \quad (4)$$

其中， (i, j) 、 (x, y) 代表宏块的中心位置，则全局运动参数在最小二乘准则下的最优估计为：

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N i_k^2 & \sum_{k=1}^N i_k j_k & \sum_{k=1}^N i_k \\ \sum_{k=1}^N i_k j_k & \sum_{k=1}^N j_k^2 & \sum_{k=1}^N j_k \\ \sum_{k=1}^N i_k & \sum_{k=1}^N j_k & N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N i_k x_k \\ \sum_{k=1}^N j_k x_k \\ \sum_{k=1}^N i_k x_k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N i_k^2 & \sum_{k=1}^N i_k j_k & \sum_{k=1}^N i_k \\ \sum_{k=1}^N i_k j_k & \sum_{k=1}^N j_k^2 & \sum_{k=1}^N j_k \\ \sum_{k=1}^N i_k & \sum_{k=1}^N j_k & N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N i_k y_k \\ \sum_{k=1}^N j_k y_k \\ \sum_{k=1}^N i_k y_k \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

由于外点的存在，最小二乘计算需要迭代进行，直到全局运动参数 (a, b, c, d, e, f) 收敛到一个稳定结果。

两步法全局运动估计的计算量集中在块匹配计算部分，改进算法主要是改进块匹配的计算速度。

4 改进的快速全局运动估计算法

根据第 2 节对基于像素的梯度下降算法的特点分析，可以发现减少其计算量的关键在于：(1)寻找一个好的寻优初始值 λ_{start} ；(2)尽可能减少参与 LM 迭代优化计算的有效像素。FFRGMET 算法根据当前帧像素的空间梯度和时间梯度抽取特征像素简化计算过程，文献[6]把 CIF 格式(352×288)的图像分成 100 个子块，在每个子块中抽取空间梯度值较大的 10% 像素作为特征点参与 LM 迭代计算来加速全局运动估计计算过程。文献[4]在金字塔的顶层通过预测获得平移量的初始估计值 (c_0, f_0) 。文献[7]按照设定的多种像素抽样模式，直接从图像中选取参与迭代计算的特征像素。根据以上分析，本文以“稀疏抽样块匹配+迭代最小二乘”两步法全局运动估计代替传统梯度下降法的金字塔前两层计算，粗略估计全局运

动参数并排除外点像素；然后在金字塔底层选取特征像素，使用 LM 算法优化两步法得到的全局运动参数。

4.1 快速块匹配算法的选择

FS 算法计算量很大，因此人们提出许多新的搜索策略，如 TSS^[8]。但是随着搜索域的缩小，运动估计的精确性也不同程度地降低。文献[9]提出在维持搜索域不变条件下的 SEA 算法，它通过引入匹配准则的“下限”，对搜索域中的搜索点先进行预判，无法通过预判的点将被直接滤掉而不再计算 SAD 值，从而提高匹配速度。由于它没有减小搜索域，因此能得到与全搜索 FS 算法相同的搜索精度。文献[10]的 MSEA 算法改进了 SEA 算法，通过引入更严格的匹配准则下限，过滤更多的搜索位置，进一步提高块匹配速度。PDE 算法在 SAD 值计算时每累积计算 16 个像素点的残差和，把累积和与当前最优 SAD 值进行比较，如果比最优 SAD 值大，则提前退出 SAD 值计算。

本文选用速度较快的 MSEA 算法作为块匹配计算的快速算法，可以在很大程度上减少块匹配计算量，从而降低全局运动的总体计算时间。

4.2 宏块下的采样

两步全局运动估计方法 95% 以上的计算集中在块匹配计算过程上，即使采用快速 MSEA 算法计算局部运动矢量，对于 CIF 格式的 Flower 测试序列，396 个宏块(22×18)都参与计算时，两步法全局运动估计计算量依然很大，仅块匹配部分计算时间达到 24 ms/f。本文采用两步法全局运动估计的目的是：(1)得到一个接近最优值的初始估计；(2)得到一个较小的、有效的、没有外点的像素集。因此，本文基于文献[7]的像素级下采样思想，采用宏块级下采样。

以 CIF 格式的测试序列为例，把 CIF 格式的当前帧图像分成 22×18=396 个 16×16 的宏块，从 396 个宏块中按照 1/2[22×9]、1/4[11×9]、1/9[7×6]及 30/396[5×6]的比例均匀抽样，如图 1(a)、图 1(b)、图 1(c)、图 1(d)所示。选取参与块匹配计算的宏块，在全局运动参数估计降低有限精度的情况下，提高了两步法全局运动估计的计算速度。

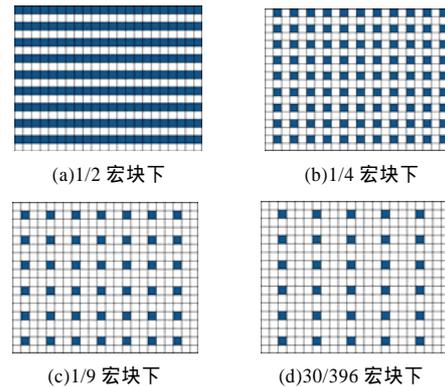


图 1 4 种宏块下的采样模式

4.3 算法流程

本文提出的全局算法具体描述如下：

Step1 把当前帧图像划分成 16×16 的宏块，从中抽取 N 个宏块 $(i_k, j_k), k=1, 2, \dots, N$ 。在参考帧图像内以 $(-p, p)$ 为搜索窗，对抽样宏块进行全搜索快速块匹配运算，得到局部运动矢量 $(mvx_k, mvy_k), k=1, 2, \dots, N$ 。

Step2 对局部运动矢量 (mvx_k, mvy_k) 进行处理，得到采样宏块的运动矢量场式(4)。

Step3 采用迭代最小二乘算法处理运动矢量场, 排除外点(属于前景移动物体的宏块), 得到全局运动参数的粗估计 $(a, b, c, d, e, f)^*$ 。

Step4 根据像素的 Sobel 梯度和时间梯度, 从抽样宏块排除外点后的剩余宏块中选择特征像素。在特征点像素集上, 用 LM 方法对全局运动参数 $(a, b, c, d, e, f)^*$ 进行优化得到最终估计。

传统的基于 3 层金字塔梯度下降的全局运动估计算法如图 2 所示, 本文改进算法如图 3 所示。

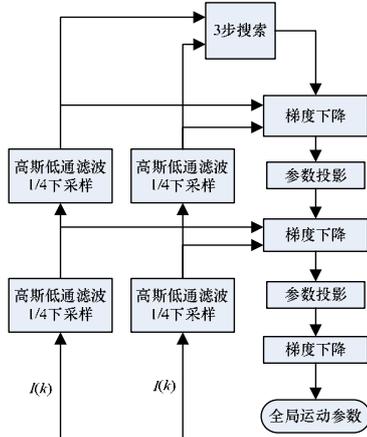


图 2 基于 3 层金字塔梯度下降的全局运动估计算法流程

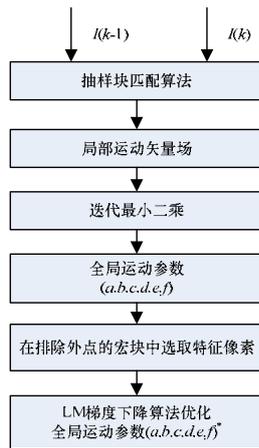


图 3 改进算法流程

5 实验数据

本文算法的硬件实验平台为 PC 计算机: Intel E4300 Core(TM)2 CPU 1.80 GHz, 1 GB DDR667 RAM, 编程语言 C++, 软件环境 VC++6.0。实验室使用的 Stefan(90 f/s)、Mobile(300 f/s)、Flower(250 f/s)、Bus(150 f/s)、Coastguard(300 f/s)、Hall(300 f/s)、Foreman(300 f/s) 7 个测试序列^[11]均为 CIF-352×288 格式的标准测试序列。

5.1 BMA 算法性能比较

BMA 算法性能比较见表 1。

表 1 块匹配算法性能比较(Flower 序列)

块匹配算法	搜索窗/像素	PSNR/dB	搜索点/块	计算速度/(ms·f ⁻¹)
FS			984.92	100.84
SEA	(-16, +16)	25.78	362.17	47.00
MSEA			44.18	24.11
FS			3618	328.56
SEA	(-32, +32)	25.80	943.36	115.15
MSEA			64.96	55.43

5.2 全局运动估计算法性能比较

在两步法全局运动估计实验中, 采用 MSEA 快速块匹配

算法, 搜索窗为(-16,+16), 使用螺旋扫描与提前退出 SAD 值计算准则。对参考帧进行全局运动补偿后, 补偿帧和当前帧之间的残差图像的 PSNR 值用来衡量全局运动估计的准确性。全局运动补偿采用双线性插值算法, 对于补偿后超出图像边界的像素, 用邻近边界像素代替。改进算法和 FFRGMET 优化计算的终止条件为:

$$\Delta c, \Delta f < 0.001 \cup \Delta a, \Delta b, \Delta d, \Delta e < 0.000 01$$

在 5 种块下采样模式下, 两步法全局运动估计的 PSNR 与计算速度比较见表 2~表 3, 改进算法与 FFRGMET 算法的 PSNR 与计算速度比较见表 4~表 5。

表 2 两步法全局运动估计的 PSNR 比较 dB

测试序列	1/1[22×18]	1/2[22×9]	1/4[11×9]	1/9[7×6]	30/396[5×6]
Stefan	24.07	23.99	23.95	23.82	23.80
Mobile	24.66	24.67	24.61	24.52	24.50
Flower	24.61	24.71	24.50	24.33	24.02
Bus	21.58	21.54	21.53	21.54	21.50
Coastguard	25.90	25.88	25.94	25.86	25.84
Hall	33.55	33.53	33.49	33.28	33.24

表 3 两步法全局运动估计的计算速度比较 (ms·f⁻¹)

测试序列	1/1[22×18]	1/2[22×9]	1/4[11×9]	1/9[7×6]	30/396[5×6]
Stefan	17.38	10.00	6.15	4.03	3.52
Mobile	13.74	8.15	5.22	3.61	3.24
Flower	24.47	13.37	8.10	5.02	4.39
Bus	23.17	13.00	7.55	4.61	3.88
Coastguard	16.67	9.51	5.90	3.97	3.56
Hall	21.48	11.92	7.11	4.34	4.08

表 4 改进算法与 FFRGMET 算法 PSNR 比较 dB

测试序列	FFRGMET 算法	改进算法	下降的 PSNR
Stefan	24.950	25.05	0.100
Mobile	24.840	25.37	0.530
Flower	24.400	24.94	0.540
Bus	21.680	21.70	0.020
Coastguard	26.040	26.32	0.280
Hall	32.760	33.64	0.880
Average	25.778	26.17	0.392

表 5 本文算法与 FFRGMET 算法计算速度比较 (ms·f⁻¹)

测试序列	FFRGMET 算法	改进算法	计算速度比
Stefan	28.09	12.11	2.32
Mobile	27.12	11.03	2.46
Flower	31.18	12.30	2.54
Bus	24.44	12.06	2.03
Coastguard	24.14	11.34	2.13
Hall	27.12	11.71	2.23
Average	27.02	11.76	2.30

由表 2~表 5 可以看出:

(1) 不同宏块抽样模式下的两步法全局运动估计的精度差别不大。如 30/396 比例的稀疏宏块抽样与 1/1 全部宏块抽样, Stefan 测试序列 PSNR 值下降了 0.27 dB, Mobile、Flower、Bus、Coastguard、Hall 测试序列分别下降了 0.16 dB、0.59 dB、0.08 dB、0.06 dB、0.31 dB。但是 30/396 宏块抽样, 直接使块匹配部分的计算量减少为全部宏块参与块匹配计算的 30/396=7.6%。

(2) 对比表 1、表 3 关于 Flower 测试序列的数据可知: “BMA+ILS”两步法全局运动估计 95% 以上的计算量都集中在块匹配计算过程中。

(3) 与 FFRGMET 算法相比, 30/396 比例的“稀疏宏块抽样”两步法全局运动估计精度(PSNR 值)差别并不大。这说明“稀疏宏块抽样”两步法全局运动估计参数在最优值附近, LM 迭代寻优计算将在很少的迭代次数内完成。

(4) 本文以“稀疏宏块抽样”两步法全局运动估计结果作为初始值, 以减少总体全局运动估计计算时间的策略是可行的。而且经过迭代最小二乘计算后所剩余宏块滤除了移动前景目标。在该像素集上选取特征像素进行 LM 优化计算, 使本文算法对外点(属于移动前景物体的像素)具有天然的鲁棒性。

(5)由表 4、表 5 数据得知,本文算法速度是 FFRGMET 算法的 2.30 倍,而且准确性更高,Stefan、Mobile、Flower、Bus、Coastguard、Hall 等 6 个测试序列的平均 PSNR 值提高了 0.392 dB。

5.3 全局运动补偿编码性能比较

把本文全局运动估计算法嵌入 MPEG-4 校验模型参考软件平台(OM-2.0-010210),对 Foreman、Coastguard、Mobile、Flower 等 4 个 CIF 格式的测试序列上进行全局运动补偿编码实验。编码方式采用 IPPP(不用 B 帧),全局运动模型使用六参数仿射模型,编码第 1 帧(即 I 帧)量化步长为 10,块匹配搜索范围为 16 像素,码率控制选项为“None”,实验结果参见表 6。

表 6 全局运动补偿编码比较

测试序列	编码效率指标	MPEG 算法	FFRGMET 算法	改进算法
Foreman	PSNR/dB	33.16	33.13	33.14
	计算速度/(ms·f ⁻¹)	661.1	187.9	159.7
Coast-guard	PSNR/dB	31.50	31.51	31.51
	计算速度/(ms·f ⁻¹)	467.0	187.6	160.8
Mobile	PSNR/dB	29.40	29.41	29.41
	计算速度/(ms·f ⁻¹)	681.0	181.6	151.0
Flower	PSNR/dB	30.27	30.27	30.27
	计算速度/(ms·f ⁻¹)	727.9	165.2	141.1

由表 6 数据可知,改进算法与 MPEG-4 校验模型标准算法、FFRGMET^[3]优化算法具有一样的编码效率(几乎没有差别的 PSNR 值)。但改进算法的时间效率有了很大提高。针对 Flower 测试序,改进算法的 GMC 编码计算速度为 141.1 ms/f, FFRGMET 为 165.2 ms/f, MPEG-4 标准算法为 727.9 ms/f。由于 OM-2.0-010210 软件平台的 GMC 编码算法中,采用 FS 螺旋扫描与提前退出 SAD 值计算准则,进行局部运动搜索和局部运动补偿,由表 1 数据知 Flower 测试序列在搜索窗大小为(-16, +16)的条件下,平均每帧的搜索时间为 100.84 ms,占 FFRGMET 优化算法的 GMC 帧编码计算速度比为 60.31%,占改进算法 GMC 帧编码计算速度的 71.49%。

6 结束语

与已有梯度下降法与两步法的全局运动估计相比,(1)改进算法比梯度下降算法计算精度更高;(2)采用稀疏抽样 MSEA 块匹配算法+迭代最小二乘法代替三层金字塔式梯度下降法全局运动估计的前 2 层计算。不仅使得改进算法计算速度块,而且后续 LM 优化计算在不存在外点、样本点少但有效的像素集上进行,因此,改进算法准确性更高、鲁棒性更好;(3)改进算法采用均匀宏块抽样与特征点像素选取的方法,比文献[7]对像素点进行随机采样的方法鲁棒性更好、准

确度更高、计算速度更快;(4)对于分辨率更高的视频序列(如 VGA 序列(640×480)),改进算法可采用更加稀疏的均匀宏块抽样加速计算,这对有实时应用要求的场合相当有利(如实时 Sprite 编码和实时视频稳像技术)。下一步研究方向为:寻找快速有效特征点、特征线检测算法,并用特征匹配的方法进行快速全局运动估计。

参考文献

- [1] MPEG-4 Video Group. ISO/IEC JTC/SC29/WG11/N3908-2001 MPEG-4 Video Verification Model Version 18.0[S]. 2001.
- [2] Rath G B, Anamitra M A. Iterative Least Squares and Compression Based Estimation for a Four-parameter Linear Motion Model and Global Motion Compensation[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems for Video Technology, 1999, 9(7): 1075-1099.
- [3] He Yuwen, Qi Wei, Yang Shiqiang, et al. Feature-based Fast and Robust Global Motion Estimation Technique for Sprite Coding[EB/OL]. (2000-01-21). http://media.cs.tsinghua.edu.cn/~yangsq/publications_cn.htm.
- [4] Bin Qi, Ghazal M, Amer A. Robust Global Motion Estimation Oriented to Video Object Segmentation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17(6): 958-967.
- [5] Dufaux F, Konrad J. Efficient, Robust, and Fast Global Motion Estimation for Video Coding[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(3): 497-501.
- [6] Keller Y, Averbuch A. Fast Gradient Methods Based on Global Motion Estimation for Video Compression[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2003, 13(4): 300-309.
- [7] Alzoubi H, Pan W D. Reducing the Complexity of MPEG-4 Global Motion Estimation Using Pixel Subsampling[J]. Electronics Letters, 2008, 44(1): 20-22.
- [8] Li Renxiang, Zeng Bing, Liu Ming. A New Three-step Search Algorithm for Block Motion[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 1994, 4(4): 438-442.
- [9] Li W, Salari E. Successive Elimination Algorithm for Motion Estimation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1995, 4(1): 105-107.
- [10] Gao X Q, Duanmu C J, Zou C R. A Multilevel Successive Elimination Algorithm for Block Matching Motion Estimation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(3): 501-504.
- [11] YUV Video Sequences[EB/OL]. [2010-01-23]. <http://trace.eas.asu.edu/yuv/index.html>.

编辑 陆燕菲

(上接第 27 页)

- [5] Hong Tzung-pei, Tseng Li-huei, Wang Shyue-liang. Learning Rules from Incomplete Training Examples by Rough Sets[J]. Expert Systems with Application, 2002, 22(2): 285-293.
- [6] Lenng Y, Li Deyu. Maximal Consistent Block Technique for Rule Acquisition in Incomplete Information Systems[J]. Information Sciences, 2003, 153(1): 95-106.
- [7] Lenng Y, Wu Weizhi, Zhang Wenxue. Knowledge Acquisition in Incomplete Information Systems: A Rough Set Approach[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 168(2): 164-180.
- [8] Liang Jiye, Xu Zhongben. An Algorithm for Knowledge in Incomplete Information Systems[J]. International Journal of

Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 2002, 10(1): 95-103.

- [9] 黄兵, 周献中, 张蓉蓉. 基于信息量的不完备信息系统属性约简[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(4): 55-60.
- [10] 李秀红, 史开泉. 一种基于知识粒度的不完备信息系统的属性约简算法[J]. 计算机科学, 2006, 33(11): 169-171.
- [11] 闫德勤. 基于等价类矩阵的属性约简[J]. 计算机科学, 2005, 32(11): 170-172.
- [12] Huang Bin, He Xin, Zhou Xianzong. Rough Computational Methods Based on Tolerance Matrix[J]. Acta Automatica Sinica, 2004, 30(2): 363-370.

编辑 陆燕菲