

# 图像修补的优化变换方法

聂笃宪<sup>1</sup>, 李杰<sup>2</sup>, 陈鹤峰<sup>3</sup>

(1. 华南农业大学理学院, 广州 510642; 2. 湘潭大学土木工程与力学学院, 湖南 湘潭 411105;

3. 广东工业大学数学学院, 广州 510090)

**摘要:** 采用整体变分(TV)模型修补图像, 提出一种图像修补的优化变换方法。引入一个辅助变量, 利用优化变换, 将 TV 模型中单变量函数的优化问题转化为等效双变量函数的优化问题, 并利用交替迭代最小化算法和 Chambolle's 投影算法求解模型。实验结果表明, 与采用梯度下降法的 TV 模型算法相比, 该方法的图像修补效率和修补效果较优。

**关键词:** 整体变分; 图像修补; 优化变换; 交替迭代最小化算法

## Optimization Transformation Method for Image Inpainting

NIE Du-xian<sup>1</sup>, LI Jie<sup>2</sup>, CHEN He-feng<sup>3</sup>

(1. College of Science, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China;

2. College of Civil Engineering and Mechanics, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China;

3. College of Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

**【Abstract】**This paper applies Total Variational(TV) model to inpaint image, proposes an optimization transformation method for image inpainting. It uses an optimization transformation technique which involves replacing their univariate functional of TV model by a bivariate functional by adding an auxiliary variable. The Chambolle's projection algorithm and alternating minimization method are employed in solving the model. Experimental results show that compared with the algorithm of solving TV model based on gradient descent method, the efficiency and quality of inpainted images by the proposed method is improved.

**【Key words】** Total Variation(TV); image inpainting; optimization transformation; alternating minimization algorithm

DOI: 10.3969/j.issn.1000-3428.2011.16.079

### 1 概述

数字图像修补近年来已成为数字图像处理的研究热点之一。它是针对图像中遗失或者损坏的部分, 利用未被损坏图像的信息, 按照一定的规则填补, 使修补后的图像接近或达到原图的视觉效果。目前, 图像修补方法主要有非线性滤波方法、贝叶斯方法、小波和谱分析方法、基于纹理结构的修补方法和统计方法等。文献[1]采用基于偏微分方程(Partial Differential Equation, PDE)的图像修补算法。文献[2]对 PDE 的图像修补算法进行了一些改进。文献[3]提出将整体变分(Total Variation, TV)模型用于图像修补算法和 CDD(Curvature Driven Diffusion)修补模型<sup>[4]</sup>。文献[5]对 TV 模型进行了一些改进的图像修补算法。以上这些方法各有其优点, 但是总存在修补效率较低的不足。本文在前人研究的基础上, 提出一种图像修补的优化变换方法, 采用交替迭代最小化算法和 Chambolle's 投影算法<sup>[6]</sup>来求解模型。

### 2 图像修补整体变分模型

整体变分模型<sup>[7]</sup>采用欧拉-拉格朗日方程和各项异性的扩散, 可以在保持边缘的同时达到去噪的目的, 从而有效地对非纹理图像进行修复。通常图像退化模型可表示为:

$$g = f + n \tag{1}$$

其中,  $g$  为观测图像;  $f$  为原始图像;  $n$  为均值为 0、方差为  $\sigma$  的加性高斯白噪声。对于图像修补问题, 其模型可表示为:

$$g|_{\Omega \setminus I} = [f + n]_{\Omega \setminus I} \tag{2}$$

其中,  $\Omega$  表示整个图像区域;  $I$  为信息丢失的待修补区域;

$\Omega \setminus I$  表示信息未丢失的区域;  $g$  为  $\Omega \setminus I$  上可利用的图像部分;  $f$  为要修补的目标图像;  $n$  为均值为 0、方差为  $\sigma$  的加性高斯白噪声。

文献[8]建立的整体变分图像修补模型为:

$$\min_f J(f) = \int_{\Omega} |\nabla f| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus I} |g - f|^2 dx \tag{3}$$

其中,  $\lambda$  为拉格朗日乘子。本文定义一个算子  $D(x)$ :

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \setminus I \\ 0 & x \in I \end{cases} \tag{4}$$

显然有  $Dg = g$ , 假设  $D^T D = D$ ,  $D^T$  为  $D$  的转置, 在变分法中, 式(3)的等效能量最小化整体变分正则化形式为:

$$\min_f J(f) = \min_f \|Df - g\|_2^2 + \alpha TV(f) \tag{5}$$

其中,  $\alpha$  为正的正规参数;  $\|\cdot\|_2$  为欧式范数;  $TV(f)$  为整体变分正则项。

$$TV(f) = \int_{\Omega} |\nabla f| dx dy = \int_{\Omega} \sqrt{f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

$$\|Df - g\|_2^2 = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (g - Df)^2 dx dy$$

为最小均方误差项。显然, 模型要求正则项  $TV(f)$  是可微的,

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(50775079); 国家青年基金资助项目(60702030); 华南农业大学校长基金资助项目(2009K023)

**作者简介:** 聂笃宪(1974—), 男, 讲师、博士研究生, 主研方向: 图像处理, 最优化方法; 李杰, 讲师、硕士; 陈鹤峰, 讲师、博士研究生

**收稿日期:** 2011-02-21 **E-mail:** ndx\_x@163.com

因此, 常常在求解该模型时必须作出这样的假设, 否则:

$$TV(f) = \int_{\Omega} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + \varepsilon} dx dy$$

其中,  $\varepsilon$  为一个很小的正参数。

通常采用显性的梯度下降法(Gradient Descent, GD)求解, 对于大小为  $M \times N$  图像  $f$ , 式(5)解的迭代形式为:

$$f_{j+1} = f_j + \eta [D^T(g - Df_j) + \alpha \frac{\partial TV(f_j)}{\partial f}] \quad (6)$$

其中,  $\eta$  代表收敛参数;  $\frac{\partial TV(f_j)}{\partial f} = -\nabla \cdot \frac{\nabla f_j}{|\nabla f|}$ ; 离散的梯度算子  $\nabla$  为:  $R^{MN} \rightarrow R^{MN}$ , 其定义形式为:

$$\begin{aligned} (\nabla f)_{j,k} &= ((\nabla f)_{j,k}^x, (\nabla f)_{j,k}^y), (\nabla f)_{j,k}^x = f_{j+1,k} - f_{j,k}, \\ (\nabla f)_{j,k}^y &= f_{j,k+1} - f_{j,k} \quad (j=1,2,L,M; k=1,2,L,N) \end{aligned}$$

并利用 Neumann 边界条件扩展不在区域  $\Omega$  内的点值。

### 3 图像修补的优化变换

对式(5), 由文献[9]的优化变换方法, 有如下变换:

$$\|Df - g\|_2^2 + \alpha TV(f) \leq \frac{\tau+1}{\tau} [\|Du - D^Tg\|_2^2 + \tau \|u - f\|_2^2] + \alpha TV(f) \quad (7)$$

其中,  $\tau$  为正的正规参数;  $u$  为引入的中间变量。具体证明过程可参考文献[9], 这样也就引入了一个新的目标函数:

$$\phi(u, f) = \frac{\tau+1}{\tau} [\|Du - D^Tg\|_2^2 + \tau \|u - f\|_2^2] + \alpha TV(f) \quad (8)$$

由文献[10]可知, 目标函数  $\phi(u, f)$  为函数  $J(f)$  的二次最优优化函数, 且对  $\forall \tau > 0$  都有:

$$J(f) = \min_u \phi(u, f) \quad (9)$$

因此, 求解模型式(5)可以等价为求解模型式(9), 即:

$$\min_f J(f) = \min_{f,u} \phi(u, f) = \min_f \min_u \left\{ \frac{\tau+1}{\tau} [\|Du - D^Tg\|_2^2 + \tau \|u - f\|_2^2] + \alpha TV(f) \right\} \quad (10)$$

### 4 交替迭代最小化算法

为了求解模型式(10), 第 1 步求解目标函数  $\phi(u, f)$  关于  $u$  最小化问题, 有:

$$(D + \tau I)u = \tau f + D^Tg \quad (11)$$

显然, 矩阵  $D + \tau I$  是非奇异的, 则有:

$$u = (D + \tau I)^{-1}(\tau f + D^Tg) \quad (12)$$

接着求解目标函数  $\phi(u, f)$  关于  $f$  最小化问题, 有:

$$\min_f \phi(u, f) = \min_f \{(1 + \tau) \|u - f\|_2^2 + \alpha TV(f)\} \quad (13)$$

式(13)是一个典型整体变分去噪问题, 本文采用简单而有效的 Chambolle's 投影算法来求解。因此, 可得到如下交替迭代最小化算法:

**Step1** 初始化  $f^{(0)}$ 。

**Step2** 按如下方式进行交替迭代即:

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= (D + \tau I)^{-1}(\tau f^{(i-1)} + D^Tg) \\ f^{(i)} &= \text{Chambolle\_Tv}(u^{(i)}) \end{aligned}$$

其中,  $\text{Chambolle\_Tv}(\cdot)$  为 Chambolle's 投影算法。

**Step3** 判断是否满足迭代终止条件, 否则继续 Step2。

**Step4** 输出图像, 结束。

### 5 实验与分析

为了说明所提出算法修补图像的优越性, 将本文算法修补的图像效果与 TV 算法以梯度下降法<sup>[8]</sup>来解的修补图像效果进行比较, 实验仿真是在 Matlab7.1 和双核 CPU 2.16 GHz,

内存 1 GB 的环境下进行。在实验中, 图像没有受到高斯白噪声污染; 并采用图像信噪比(Signal Noise Ratio, SNR)对修补图像进行定量评价, 其定义形式为:

$$S_{\text{SNR}} = 10 \lg \left( \frac{\|f\|_2}{\|f - \hat{f}\|_2} \right) \quad (14)$$

其中,  $f$  和  $\hat{f}$  分别为原始图像和修补图像, 算法迭代终止条件为:

$$\frac{\|f^{(i+1)} - f^{(i)}\|_2}{\|f^{(i+1)}\|_2} < 10^{-4}$$

$f^{(0)}$  初始化为  $g$ , 算子  $D$  为式(4)所定义的  $0, 1$  随机矩阵, 原始图像分别采用  $256 \times 256$  像素的 Cameraman 和 Lena 灰度图像。本文方法与文献[8]的 TV 算法对 Cameraman 和 Lena 灰度图像进行修补, 结果分别如图 1、图 2 所示, 实验参数与结果如表 1 所示。



图 1 2 种方法的 Cameraman 图像修补效果对比

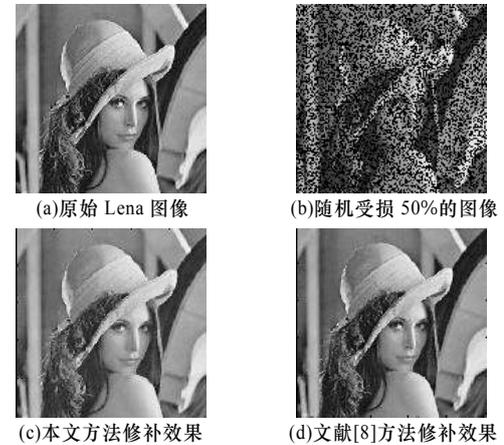


图 2 2 种方法的 Lena 图像修补效果对比

表 1 2 种图像修补方法的参数与结果

图像	方法	参数	迭代 200 次的相对误差	$S_{\text{SNR}}/\text{dB}$
Cameraman	本文方法	$\eta=1.8519, \varepsilon=7e-002$	1.23e-002	23.74
	文献[8]方法	$\eta=1, \alpha=1e-005, \varepsilon=1e-004$	1.34e-002	22.94
Lena	本文方法	$\eta=1.8519, \varepsilon=8e-002$	1.11e-002	27.05
	文献[8]方法	$\eta=1, \alpha=1e-005, \varepsilon=1e-004$	1.14e-002	25.95

2 种方法修补过程中  $S_{\text{SNR}}$  值与迭代次数变化情况分别如图 3、图 4 所示。可以看出, 经过 80 次迭代后, 本文算法修补 Cameraman 图像的  $S_{\text{SNR}}$  值达到了 22.65, 而文献[8]方法修补图像的  $S_{\text{SNR}}$  值为 16.82, 本文算法修补 Lena 图像的  $S_{\text{SNR}}$

值达到了 25.35, 文献[8]方法修补 Lena 图像的  $S_{SNR}$  值为 17.80。在有限步迭代后, 本文方法修补图像的效率较高。因此, 不管是  $S_{SNR}$  值, 还是经过 200 次迭代以后的相对误差值, 本文方法均比文献[8]的方法好, 具有明显的优越性。

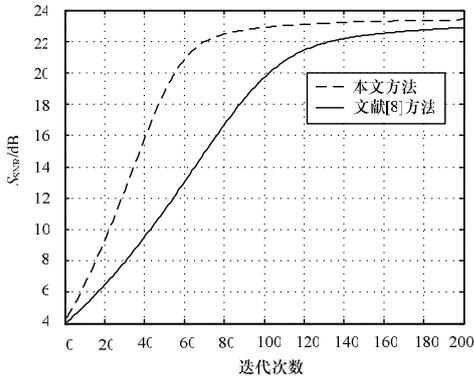


图3 2种方法修补 Cameraman 图像的  $S_{SNR}$  对比

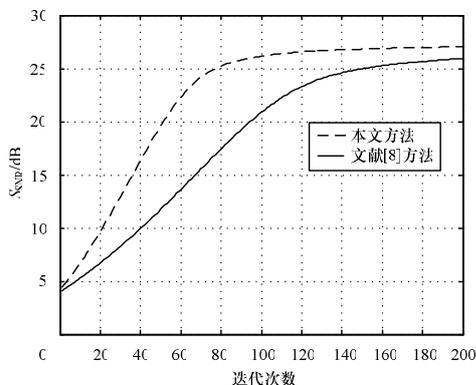


图4 2种方法修补 Lena 图像的  $S_{SNR}$  对比

## 6 结束语

本文提出一种图像修补的优化变换方法, 可以避免 TV 模型在采用梯度下降法求解时  $TV(f)$  不可微的情况。通过对

相关图像进行比较实验, 证明了本文方法的优越性。但是待修补图像还受到多种噪声降质的影响, 因此, 对其进行预处理和进一步提高修补效果是下一步的研究方向。

## 参考文献

- [1] Bertalmio M, Sapiro G, Caselles V, et al. Image Inpainting[C]// Proc. of ACM SIGGRAPH Computer Graphics. New Orleans, USA: [s. n.], 2000.
- [2] 廉晓丽, 徐中宇, 冯丽丽, 等. 一种新的基于偏微分方程的图像修复[J]. 计算机工程, 2009, 35(6): 234-236.
- [3] Chan T, Shen Jianhong. Mathematical Models for Local Deterministic Inpaintings[R]. Los Angeles, California, USA: Department of Mathematics, University of California-Los Angeles, Tech. Rep.: Tr00-11, 2000.
- [4] Chan T, Shen Jianhong. Non-texture Inpainting by Curvature Driven Diffusion(CDD)[J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2001, 12(4): 436-449.
- [5] 许威威, 潘志庚, 张明敏. 一种基于整体变分的图像修补算法[J]. 中国图象图形学报: A 版, 2002, 7(4): 351-355.
- [6] Chambolle A. An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2004, 20(1/2): 89-97.
- [7] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms[J]. Physics D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60: 259-268.
- [8] Chan T F, Shen Jianhong. Mathematical Models for Local Non-texture Inpaintings[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2001, 62(3): 1019-1043.
- [9] Huang Yumei, Ng M K, Wen Youwei. A Fast Total Variation Minimization Method for Image Restoration[J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2008, 7(2): 774-795.
- [10] Hunter D, Lange K. A Tutorial on MM Algorithms[J]. Journal of American Statistical Association, 2004, 58(1): 30-37.

编辑 顾姣健

(上接第 231 页)

在运算时间方面, 由于采用稀疏矩阵方法和改进的 PSO 算法, 有效提高运算速度, 保证算法的实时性, 算法时间与未采用稀疏矩阵和改进 PSO 算法的列举法作比较, 如表 1 所示, 可见利用稀疏矩阵和改进的 PSO 算法可以大大提高运算速度。

表1 算法时间比较

图像	遍历法	二维 Otsu 法	本文算法
道路图像	45.919	0.618	1.497

## 6 结束语

本文根据红外图像的特点, 提出一种改进的灰度级-平均灰度级-梯度三维 Otsu 法, 选用适合红外图像的梯度计算算子, 提高分割准确性, 采用稀疏矩阵方法和一种可以克服早熟停滞的改进 PSO 算法来选取最佳阈值, 提高算法的运算速度。实验结果表明, 该算法能有效地将红外图像中的目标与背景分割开来, 为后续的红外图像处理奠定了良好的基础。但在对于较大、较复杂图像的分割上, 分割速度有待进一步改善。

## 参考文献

- [1] Otsu N. A Threshold Selection Method from Gray-level Histo-

gram[J]. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetic, 1979, 9(1): 62-66.

- [2] Zhang Junping, Sun Wenbang, Tang Wenyan. Image Change Detection Algorithm Based on Clustering Characteristic of 2D Histograms[C]//Proc. of IEEE International Conference on Geoscience and Remote Sensing Symposium. [S. l.]: IEEE Press, 2006.
- [3] 王 忠, 付阿利. 基于 CPSO 的二维 Otsu 图像分割法[J]. 计算机工程, 2009, 35(19): 206-209.
- [4] 任继军, 何明一. 一种基于三维直方图的改进 C-V 模型水平集图像分割方法[J]. 红外与毫米波学报, 2008, 27(1): 72-76.
- [5] 谢晓峰, 张文俊, 杨之廉. 微粒群算法综述[J]. 控制与决策, 2003, 18(2): 129-134.
- [6] 顾建雄, 田亚菲. 保持图像细节的红外图像直方图均衡算法[J]. 微计算机信息, 2010, 26(1): 186-188.
- [7] 吴一全, 张金矿. 改进的 2D Otsu 法及混沌粒子群递推的阈值分割[J]. 中国图象图形学报, 2009, 14(9): 1843-1849.
- [8] 朱海梅, 吴永萍. 一种高速收敛粒子群优化算法[J]. 控制与决策, 2010, 25(1): 20-24.

编辑 陈 文



