

基于压缩感知的图像快速重建方法

侯金曼¹, 何 宁², 吕 科¹

(1. 中国科学院研究生院计算与通信工程学院, 北京 100049; 2. 北京联合大学信息学院, 北京 100101)

摘 要: 基于多种稀疏变换基和观测矩阵的组合, 采用正交匹配追踪算法对图像进行重建。在分析各种组合重建效果的基础上, 提出一种图像快速重建方法, 对图像进行一级小波分解, 提取出近似分量子图像, 运用压缩感知技术对其进行恢复, 综合细节分量和恢复出的近似分量进行小波逆变换, 得到重建图像。实验结果表明, 该方法在相同的观测值条件下, 能减少算法运行时间, 提高重建图像质量。

关键词: 压缩感知; 稀疏表示; 小波分解; 图像重建; 正交匹配追踪

Image Fast Reconstruction Method Based on Compressive Sensing

HOU Jin-man¹, HE Ning², LV Ke¹

(1. College of Computing & Communication Engineering, Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

2. College of Information, Beijing Union University, Beijing 100101, China)

【Abstract】 Orthogonal Matching Pursuit(OMP) algorithm is used to reconstruct images based on the combinations of several common sparse transform bases and measurement matrices. This paper analyzes and compares the reconstruction results with above various combinations. And on this basis, a fast image reconstruction method is proposed. A multi-scale wavelet decomposition is used to extract the approximate coefficients from the image. It uses compressed sensing method to recover these approximate coefficients, and the reconstructed images are obtained with inverse wavelet transform based on detail coefficients and recovered approximate coefficients. Experimental results show that with the same number of measurement values, the run time of this method and the quality of the reconstructive images have great improvements.

【Key words】 compressive sensing; sparse representation; wavelet decomposition; image reconstruction; Orthogonal Matching Pursuit(OMP)

DOI: 10.3969/j.issn.1000-3428.2011.19.071

1 概述

在传统采样中, 依据 Nyquist 采样定理, 采样频率不能低于信号最高频率的 2 倍, 当信号很长时无疑会增加采样量, 给传输和存储带来巨大挑战。传统采样理论对信息获取、存储及传输等有很大限制。

文献[1-2]提出一种新的信息获取理论, 即压缩感知^[1-2], 其思想主要是: 通过远低于 Nyquist 采样率的方式对稀疏的或可压缩的信号进行采样, 同时能以高概率精确地恢复出原信号。该理论在信息论、图像处理、医疗成像、模式识别等很多领域受到高度关注。

本文采用经典的 5 种稀疏变换基和 5 种观测矩阵的不同组合对多幅图像进行重建实验, 分析比较了各种组合的重建效果, 并提出一种新的图像快速重建方法。

2 压缩感知

2.1 压缩感知的主要理论框架

压缩感知中主要涉及以下问题: (1)信息的稀疏表示问题, 即如何选择合适的基底使所关注的信号在该基底上表现出最强的稀疏性。(2)采样方式的选择问题, 即如何选择合适的采样机制以有效利用信息本质上的稀疏性使得在较少的测量下完全恢复信号。(3)稀疏信号的完全重建问题, 即以什么样的算法完全重建不完全采样下的信号。

在第(1)个问题中, 一个长度为 N 的一维离散时间信号 x , 可以表示为一组正交基 $\{\Psi_i\}_{i=1}^N$ 的线性组合, 把向量集 $\{\Psi_i\}_{i=1}^N$ 作为列向量形成 $N \times N$ 的基矩阵 Ψ , 则信号 x 可以表示成如下形式:

$$x = \sum_{i=1}^N \theta_i \Psi_i \text{ 或 } \theta = \Psi^T x \quad (1)$$

其中, θ 是投影系数, 如果 θ 只有很少的大系数, 则说信号 x 是可压缩的。常用的稀疏变换基有傅里叶变换基、小波基、离散余弦变换(Discrete Cosine Transform, DCT)变换基等。

观测过程是利用 $M \times N$ 的观测矩阵 Φ 的 M 个行向量对投影系数 θ 进行投影, 得到 M 个观测值 $y_j = \langle \theta, \Phi_j \rangle, j=1, 2, \dots, M$, 记观测向量 $y = (y_1, y_2, \dots, y_M)$, 则:

$$y = \Phi \theta = \Phi \Psi^T x = Ax \quad (2)$$

若 Φ 满足一致不确定性原则(Uniform Uncertainty Principle, UUP)或一定阶数的约束等距性(Restricted Isometry Property, RIP)条件, 则由少量观测值以高精度重构原始信号^[3]。同时给出 2 种满足 RIP 的观测矩阵: 高斯随机观测矩阵和 Bernoulli 随机观测矩阵^[3]。

其他常用的满足 RIP 条件的观测矩阵还有二值随机矩阵、局部哈达玛矩阵、非相关测量矩阵^[4]以及非常稀疏随机投影矩阵等。

针对信号的重建问题, 在信号 x 稀疏或可压缩的前提下, 可将该问题转化为求解最小 L_0 范数问题^[5]:

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61070120); 国家“973”计划基金资助项目(2010CB731804-1); 公益性行业(气象)科研专项基金资助项目(2060302-21)

作者简介: 侯金曼(1985—), 女, 硕士研究生, 主研方向: 数字图像处理; 何 宁, 副教授、博士; 吕 科, 教授、博士

收稿日期: 2011-04-22 **E-mail:** houjman09@gmail.com

$$\min \|\Psi^T x\|_0$$

$$\text{s.t. } Ax = \Phi \Psi^T x = y \quad (3)$$

但是,文献[6]指出该问题是 NP 难问题,可以将式(3)转化为最小 L_1 范数问题等价求解:

$$\min \|\Psi^T x\|_1$$

$$\text{s.t. } Ax = \Phi \Psi^T x = y \quad (4)$$

目前常用的恢复算法有内点法、梯度投影法、正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)算法^[7]、迭代阈值法以及各种改进算法等。

2.2 正交匹配追踪算法

文献[7]提出的一种正交匹配追踪算法属于贪婪迭代方法,其描述如下:

输入

- (1) $M \times N$ 维的观测矩阵 Φ ;
- (2) M 维的观测向量 y ;
- (3) 信号 s 的稀疏度 K 。

输出

- (1) 原始信号的近似估计 \hat{s} ;
- (2) 索引集合 A_K ;
- (3) 向量 y 的 M 维近似向量 α_K ;
- (4) M 维的冗余向量 $r_K = y - \alpha_K$ 。

算法具体步骤如下:

- (1) 初始化冗余向量 $r_0 = y$, 索引集合 $A_0 = \emptyset$, 选择的列向量组成的矩阵 $\Phi_0 = \Phi$, 迭代计数 $t=1$;
- (2) 找到观测矩阵的列向量与冗余向量的内积最大的索引位置 λ_t , 即使其满足 $\lambda_t = \arg \max_{j=1,2,\dots,N} |r_{t-1}, \phi_j|$;
- (3) 记 $A_t = A_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$, $\Phi_t = [\Phi_{t-1} \ \phi_{\lambda_t}]$;
- (4) 利用最小二乘法计算 $x_t = \arg \min_x \|\Phi_t x - y\|_2$;
- (5) 计算新的近似和冗余向量: $\alpha_t = \Phi_t x_t$, $r_t = y - \alpha_t$;
- (6) $t = t + 1$, 如果 $t < K$, 则返回步骤(2);
- (7) 原信号 s 的近似估计 \hat{s} 在索引位置 A_K 处的项非零,且 \hat{s} 在 λ_j 处的值为 x_K 中的第 j 项的值。

3 组合不同稀疏变换基和观测矩阵的图像重建

3.1 稀疏变换基和观测矩阵

实验采用 5 种不同的稀疏变换基,分别为离散余弦变换基、离散傅里叶变换基和 3 种不同的小波变换基(即 Daubechies、Coiflets、Symlets); 5 种观测矩阵分别为高斯随机矩阵、Bernoulli 随机矩阵、非相关测量矩阵、局部哈达玛矩阵以及非常稀疏投影矩阵;恢复算法采用的是正交匹配追踪算法。

5 种稀疏变换描述如下:

(1) 离散傅里叶变换。对于 N 点序列 $\{x_n\}, 0 \leq n < N$, 它的离散傅里叶变换为:

$$\hat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} x_n, k=0,1,\dots,N-1 \quad (5)$$

(2) 离散余弦变换。对于 N 点序列 $\{x_n\}, 0 \leq n < N$, 它的离散余弦变换为:

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{\pi}{N}k\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] \quad (6)$$

(3) Daubechies 小波。Daubechies 小波一般可简写成 dbN。小波函数 $\psi(t)$ 和尺度函数 $\phi(t)$ 中的支撑区为 $2N-1$, $\psi(t)$ 的消失矩为 N 。

(4) Coiflets 小波。Coiflet 小波具有 Coif $N(N=1,2,3,4,5)$ 系列。Coiflet 的小波函数 $\psi(t)$ 的 $2N$ 阶矩为 0, 尺度函数 $\phi(t)$ 的 $2N-1$ 阶矩为 0。

(5) Symlets 小波。Symlets 小波函数是近似对称的小波函数,它是对 db 函数的一种改进。Symlets 小波系通常表示为 Sym $N(N=2,3,\dots,8)$ 。

实验采用的观测矩阵描述如下:

(1) 高斯随机矩阵: 矩阵中每个元素都独立地服从均值为 0、方差为 $\frac{1}{M}$ 的正态分布。

(2) Bernoulli 随机矩阵: 矩阵中每个元素独立服从对称 Bernoulli 分布。

(3) 非相关测量矩阵: 从 N 阶正交矩阵中均匀随机抽取 M 行作为行向量组成新矩阵,并单位化新矩阵的列向量。

(4) 局部哈达玛矩阵: 从 N 阶哈达玛矩阵中随机抽取 M 行。

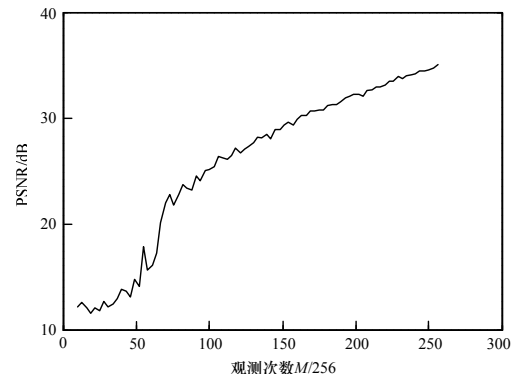
(5) 非常稀疏投影矩阵: 矩阵中每个元素独立服从如下分布:

$$X \sim \begin{bmatrix} \sqrt{s} & 0 & -\sqrt{s} \\ \frac{1}{2s} & 1-\frac{1}{s} & \frac{1}{2s} \end{bmatrix}$$

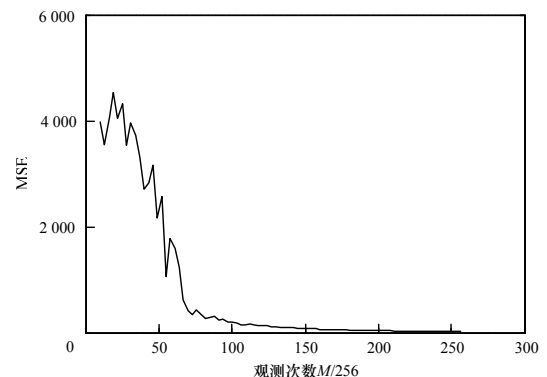
其中,当 $s \gg 3$ 时,称 X 服从非常稀疏投影分布,本文取 $s = \sqrt{256} = 16$ 。

3.2 仿真实验结果

实验中采用 6 幅不同的 8 位 256×256 像素灰度图像(Mary, Cameraman, Girl, Lena, Panda, Couple)。软件环境为 Matlab 7.8.0 (R2009a)版本。以 Mary 图像为例,从图 1 可以看出,随着观测次数 M 的增加,重构图像的峰值信噪比(PSNR)越来越高,均方误差(MSE)越来越小,即图像重建质量越好。



(a) PSNR



(b) MSE

图 1 观测次数 M 与图像恢复质量的关系

可以看出, 当 M 取大于 80 以上的数目时, 2 条曲线的变化趋势均变得比较缓和, 即图像的恢复质量才能比较稳定。当小于这个值时, 2 条曲线均比较陡峭, 变化趋势较大, 基本不能恢复原图像。这说明保证图像的重构质量, 观测次数 M 不能任意取值。

在图 2 中, 横坐标分为 5 个小区间, 每个小区间对应一个稀疏变换基, 分别为离散余弦变换基、Symlets 小波变换基、Daubechies 小波变换基、离散傅里叶变换基和 Coiflets 小波变换基, 在每个小区间内部的 5 个取值分别对应 5 种不同的观测矩阵, 顺序依次为高斯随机矩阵、Bernoulli 随机矩阵、非相关测量矩阵、局部哈达玛矩阵以及非常稀疏投影矩阵, 这样就构成了 25 种不同的稀疏变换基和观测矩阵的组合。

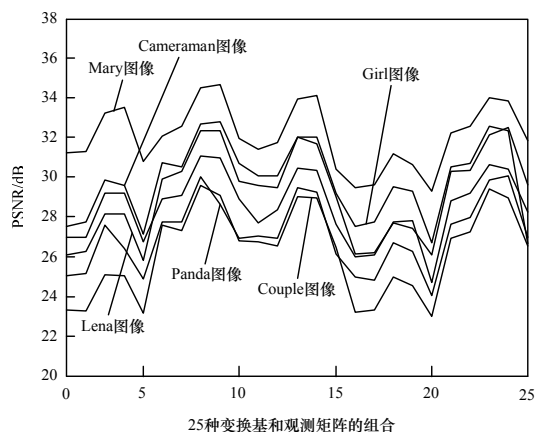


图 2 不同组合的图像恢复质量比较

可以看出, 在相同的组合条件下, 对于不同的图像, 重建质量也不一样, 而对于同一幅图像, 选用不同的变换基与观测矩阵, 其重建质量也不相同。在本次实验中, 对于不同的 6 幅图像分别采用 5×5 种不同的变换基和观测矩阵的组合对其进行重建, 重建效果曲线的分布趋势基本相同。仔细分析每条曲线的走势可知, 当观测矩阵为非相关测量矩阵和局部哈达玛矩阵, 变换基取 3 种不同的小波基时, 图像的重建质量比较高。

4 改进的图像快速重建方法

4.1 方法描述

在现有的实验基础上, 图像的重建时间还是比较长的, 因此, 需要减少图像的重建时间。

对二维原始图像进行一级小波变换后, 原始图像被分解成 4 个子图像, 每个子图像包含了原始图像中不同的频率成分。左上角子图像包含了图像的近似分量, 即图像的主要特征; 右上角子图像包含了图像的垂直分量; 左下角子图像包含了图像的水平分量; 右下角子图像包含了图像的对角分量。经过小波变换, 每个子图像长宽尺寸也降低到原来的一半, 即分辨率降低到原来的 $1/4$ 。

借鉴以上思想, 本文提出一种新的图像快速重建方法, 具体步骤如下:

- (1) 对原始图像进行一次一级小波变换, 提取出图像的近似分量量子图像;
- (2) 对近似分量量子图像运用压缩感知技术进行恢复;
- (3) 综合细节分量和恢复出的近似分量进行相应的小波逆变换, 得到重建图像。

4.2 实验结果

本实验中一级小波变换采用 Daubechies 小波 (db4), 稀

疏变换基采用 Coiflets 小波基, 观测矩阵选用高斯随机矩阵, 观测个数取 $M=46\ 080$, 重建效果对比如图 3 和表 1 所示, 其中, 图 3 和表 1 中的 A 方法表示直接对整幅图像进行基于压缩感知重建的方法; B 方法为本文方法。



(a)A 方法重建的 Mary 图像



(b)B 方法重建的 Mary 图像



(c)A 方法重建的 Cameraman 图像



(d)B 方法重建的 Cameraman 图像



(e)A 方法重建的 Girl 图像



(f)B 方法重建的 Girl 图像



(g)A 方法重建的 Lena 图像



(h)B 方法重建的 Lena 图像



(i)A 方法重建的 Panda 图像



(j)B 方法重建的 Panda 图像



(k)A 方法重建的 Couple 图像



(l)B 方法重建的 Couple 图像

图 3 A 方法和 B 方法重建图像的对比效果

(下转第 226 页)