

一类新的层次双环网络及其最优路由算法

钟 玮^a, 陈宝兴^a, 陈 宇^b

(漳州师范学院 a. 计算机科学与工程系; b. 数学与信息科学系, 福建 漳州 363000)

摘 要: 用图的笛卡尔积 $F_m \times F_{m-1} \times \cdots \times F_1 \times G$ 构造一类新的层次双环网络, 给出其最优路由算法。图 G 为 Petersen 图, F_i 为特殊的无向双环网络。研究网络的一些基本性质, 并与杜艳等构造的层次双环网络(计算机工程与应用, 2010 年, 第 34 期)进行比较。分析结果表明, 新构造的网络是一类连接度小、直径短, 存在简单且路由算法最优的新型网络拓扑结构。

关键词: 互连网络; 双环网络; 笛卡尔积; 层次双环网络; 最优路由

A New Kind of Hierarchical Double-loop Network and Its Optimal Routing Algorithm

ZHONG Wei^a, CHEN Bao-xing^a, CHEN Yu^b

(a. Department of Computer Science; b. Department of Mathematics and Information Science,

Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, China)

【Abstract】 In this paper, a new kind of hierarchical double-loop networks constructed by the Cartesian product $F_m \times F_{m-1} \times \cdots \times F_1 \times G$ (where G is Petersen graph and F_i is a special undirected double-loop network) and its optimal routing algorithm are proposed. Its properties are discussed. Through compared with the hierarchical double-loop networks constructed by Du Yan, et al (computer engineering and application, 2010, issue 34). Experimental result shows that this kind of networks is a new topology with good connection, shorter diameter and has a simple and optimal routing algorithm.

【Key words】 interconnection network; double-loop network; Cartesian product; hierarchical double-loop network; optimal routing

DOI: 10.3969/j.issn.1000-3428.2012.18.024

1 概述

为了提高处理机之间的通信效率, 人们一直在寻找拓扑结构简单、网络直径短的拓扑结构。近年来, 研究者对互连网络进行了大量的研究, 提出了各种各样互连网络, 如双环网络、超立方体双环互连网络^[1]等。双环网络是计算机互连网络或通信系统的一类重要拓扑结构, 广泛应用于计算机局域网和各种平行处理结构, 比如它在电力网络系统中有着重要的应用^[2]。它具有如下优点: 网络直径小, 易于扩展, 具有对称性且有一定的容错能力。对该问题的研究是当前局域网络和并行分布系统理论和应用中的一个重要课题。

另外, 拓扑结构 Petersen 图也具有许多良好的性质, 如连接度小、短直径、正则性, 从而引起人们广泛的关注并且广泛应用于互连网络的设计中。基于 Petersen 图, 研究者提出了许多新的拓扑结构。例如, 文献[3]给出了一种折叠 Petersen 图网络(Folded Petersen Network, FPN), 其中 k 维的 FP 网络 FP_k 定义为 k 个 Petersen 图的笛卡尔积。文

献[4]构造了一种循环 Petersen 图网络(Cyclic Petersen Network, CPN)。文献[5]给出了 Petersen 图基于环的扩展方法, 并在此方法上提出了一种环状 Petersen 图互连网络 $RP(k)$ 。文献[6]将 $RP(k)$ 进一步扩展到多维环状 Petersen 图互连网络 $RP(P, k_1, k_2, \cdots, k_t)$ 。文献[7]结合双环网络拓扑结构提出了 Petersen 图的另一种扩展互连网络双环 Petersen 图互连网络 $DLC PG(k)$ 。文献[8]提出了一类层次双环互连网络 $HDRN(k)$ 。该网络结合双环网络和 Petersen 网络的优点, 并且弥补了 Petersen 的不可扩展性。通过研究它的性质, 分析它的拓扑结构, 并与层次环网络的拓扑结构进行了比较, 结果证明了 $HDRN(k)$ 具有非常好的连接性、更小的直径以及简单的拓扑结构, 是一种实用的互连网络。

在上述相关研究的基础上, 令 $k_i = 2d_i^2 + 2d_i + 1$, $s_i = 2d_i + 1$ 。本文用图的笛卡尔积 $F_m \times F_{m-1} \times \cdots \times F_1 \times G$ (其中, 图 G 为 Petersen 图; F_i 为无向双环网络 $G(k_i; \pm 1, \pm s_i)$; F_i 的直径为 $d_i = \left\lceil \frac{\sqrt{2k_i - 1} - 1}{2} \right\rceil$) 构造了一类层次双环网络, 并给出了该

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60973150); 福建省自然科学基金资助项目(2010J01354)

作者简介: 钟 玮(1982—), 女, 实验师、硕士, 主研方向: 网络拓扑设计; 陈宝兴, 教授、博士; 陈 宇, 讲师、硕士

收稿日期: 2011-10-17 **修回日期:** 2012-01-06 **E-mail:** zww_wei_2002@163.com

网络的若干性质, 及其最优路由算法。这类层次双环网络具有良好的连接性, 比文献[8]所给的一类层次双环网络(该网络的双环网络层 F_i 为无向双环网络 $G(k_i; \pm 1, \pm \sqrt{k_i})$, 直径大约为 $\sqrt{k_i}$) 具有更短的通信延迟。

2 定义与引理

2.1 预备知识

定义 1 Petersen 图 $G(V, E)$ 是具有下述性质的一种网络拓扑结构^[9]: (1) $G(V, E)$ 是连通无向图; (2) $V = \{u_0, u_1, \dots, u_4; v_0, v_1, \dots, v_4\}$; (3) $E = \{<u_i, v_i> | i=0, 1, \dots, 4\} \cup \{<u_{i+1}, u_i> | i=0, 1, \dots, 4\} \cup \{<v_i, v_{i+k}> | i=0, 1, \dots, 4, k=2, 3\}$ 。图 1 是 Petersen 图的拓扑结构。

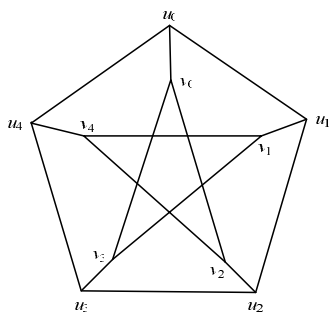


图 1 Petersen 图的拓扑结构

显然, Petersen 图互连网络具有以下良好的性质:

(1) 网络中任意节点的连接度均为 3, 网络的直径为 2, 网络具有正规性、对称性、短直径、低连接度等优良特性。

(2) 网络中任意 2 个节点之间有 3 条无交的链路, 若 2 个节点直接相连, 则这 3 条链路的长度分别为 1、4 和 4, 否则为 2、3 和 3, 因此, 具有良好的容错性与并行性。

(3) 网络具有良好的可嵌入性, 其缺点是网络不具备可扩展性。

定义 2 设 N, s 是 2 个正整数, 且 $N \geq 5, 1 < s < \frac{N}{2}$ 。无向双环网络 $G(N; \pm 1, \pm s)$ 是如下定义的无向图 (V, E) : 其结点集是 $V = Z_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, 边集是 $E = \{i \rightarrow i+1 \pmod{N}, i \rightarrow i+s \pmod{N}, i \rightarrow i-1 \pmod{N}, i \rightarrow i-s \pmod{N} | i=0, 1, \dots, N-1\}$ 。

定义 3 2 个图 G_1 和 G_2 的笛卡尔积用 $G_1 \times G_2$ 表示, 它是这样的一个图: 点集 $E(G_1 \times G_2) = \{(U_i, V_j)(U_h, V_k) | U_i = U_h \text{ 且 } V_j V_k \in E(G_2) \text{ 或者 } V_j = V_k \text{ 且 } U_i U_h \in E(G_1)\}$ 。

2.2 层次双环网络的构造与性质分析

文献[8]提出了一类层次双环网络 $HDRN(k)$, 给出了 $HDRN(k)$ 网络的构造方法, 并分析了其性质, 证明其具有良好的特性。令 $k_i = 2d_i^2 + 2d_i + 1, s_i = 2d_i + 1$ 。本文用图的笛卡尔积 $F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$ (其中, 图 G 为 Petersen 图; F_i 为无向双环网络 $G(k_i; \pm 1, \pm s_i)$) 构造了另一类层次双环网络, 并对该类层次双环网络进行研究。本节主要分析了该层次双环网络的性质, 证明了该网络具有良好的扩展性、较好的连接性和更小的直径。

定义 4 设 d_1, d_2, \dots, d_m 都是大于 1 的正整数。令 $k_i = 2d_i^2 + 2d_i + 1, s_i = 2d_i + 1 (i=1, 2, \dots, m)$ 。层次双环网络用图的笛卡尔积

$F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$ 表示, 其中, 图 G 为 Petersen 图; F_i 为无向双环网络 $G(k_i; \pm 1, \pm s_i), 1 \leq i \leq m$ 。它是这样的一个图: 点集 $V(F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G) = V(F_m) \times V(F_{m-1}) \times \dots \times V(F_1) \times V(G)$; 边集 $E(F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G) = \{(a_m, a_{m-1}, \dots, a_0)(b_m, b_{m-1}, \dots, b_0) | \text{存在某一个 } a_i \neq b_i, a_i b_i \in E(F_i) \text{ 或 } a_i b_i \in E(G), \text{ 对于其余的 } j \neq i, \text{ 均有 } a_j = b_j, \text{ 其中, } i, j \in \{0, 1, \dots, m\}\}$ 。

利用该层次双环网络的拓扑结构, 对于某些节点数目较大的计算机网络, 可以构造出一个直径相对较小的网络。例如当网络的节点数为 $13 \times 41 \times 10 = 5\,330$ 时, 可构造出一个层次双环网络 $F_2 \times F_1 \times G$ 网络, 其中, F_1 和 F_2 分别为双环网络 $G(13; \pm 1, \pm 5)$ 和 $G(41; \pm 1, \pm 9)$ 。根据计算, 该网络的直径为 $2+4+2=8$ 。

层次双环网络有如下的性质:

性质 1 层次双环网络 $F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$ 是正规互连网络, 任意节点的连接度是 $4m+3$ 。

由于 Petersen 图和无向双环网络都是正规互连网络, 根据层次双环网络的构造方法, 可知该类层次双环网络是正规互连网络。并且 G 为 Petersen 图, 其连接度为 3, 每增加一层双环网络连接, 其连接度就增加 4, 因此, 该类层次双环网络的连接度为 $4m+3$ 。

性质 2 层次双环网络 $F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$ 的直径为 $d_m + d_{m-1} + \dots + d_1 + 2$ 。

根据文献[10]可以求出双环网络 F_1, F_2, \dots, F_m 的直径分别为 d_1, d_2, \dots, d_m , 因此, 该类层次网络的直径为 $d_m + d_{m-1} + \dots + d_1 + 2$ 。

性质 3 层次双环网络 $F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$ 具有良好的扩展性。

可扩展性指的是在网络拓扑结构性能保持不变的情况下扩充节点的能力。层次双环网络 $F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$, 增加一层双环网络连接, 即该网络变成 $m+1$ 维层次双环网络 $F_{m+1} \times F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$, 该网络为 k_{m+1} 个 $F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$ 层次双环网络连接而成。原来的 $F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$ 层次双环网络各节点的连接度增加 4, 但是除了与新增节点的连接外, 原来的层次双环网络 $F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$ 内部的节点和连接关系没有变动。所以, 该层次双环网络具有良好的扩展性。

为了进一步说明 $F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$ 的优良特性, 表 1 给出其特殊情况, 即二维层次双环网络 $F_2 \times F_1 \times G$ 与文献[8]给出的二维层次双环网络 $F_2' \times F_1' \times P$ 的直径与连接度的对比。从表 1 可以发现, 同样的节点数, 二维层次双环网络 $F_2 \times F_1 \times G$ 能构造出直径较小的网络。

表 1 2 种层次双环网络的连接度和直径比较

名称	连接度	网络直径	不同节点数下的直径		
			13×13×10	61×41×10	211×181×10
$F_2' \times F_1' \times P$	11	$\approx \lfloor \sqrt{k_2} \rfloor + \lfloor \sqrt{k_1} \rfloor + 2$	8	13	27
$F_2 \times F_1 \times G$	11	$d_1 + d_2 + 1$	6	11	21

3 $F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$ 网络的最优路由算法

对于无向双环网络 $G(n; \pm s_1, \pm s_2)$, 从点 i 到点 $(i+s_1) \pmod n$ 的边称为 $[+s_1]$ 边, 点 i 到点 $(i-s_1) \pmod n$ 的边称为 $[-s_1]$ 边, 点 i 到点 $(i+s_2) \pmod n$ 的边称为 $[+s_2]$ 边, 点 i 到点 $(i-s_2) \pmod n$ 的边称为 $[-s_2]$ 边。若一条从点 i 到点 j 的路径, 它包含 x_1 条 $[+s_1]$ 边、 x_2 条 $[-s_1]$ 边、 y_1 条 $[+s_2]$ 边、 y_2 条 $[-s_2]$ 边, 则有 $j = (i + x_1 \times s_1 - x_2 \times s_1 + y_1 \times s_2 - y_2 \times s_2) \pmod n$, 且等式成立与路径中边的顺序无关。仅对路径的长度感兴趣, 故将此路径记为 $x_1[+s_1] + x_2[-s_1] + y_1[+s_2] + y_2[-s_2]$ 。

性质 4 设 $x_1[+s_1] + x_2[-s_1] + y_1[+s_2] + y_2[-s_2]$ 是一条从 i 到 j 的最短路径, 则 x_1 与 x_2 至少有一个为 0, y_1 与 y_2 至少有一个为 0。

从性质 4 知, 从 i 到 j 的最短路径使用的边仅含 $[+s_1]$ 边与 $[+s_2]$ 边, 或仅含 $[-s_1]$ 边与 $[+s_2]$ 边, 或仅含 $[+s_1]$ 边与 $[-s_2]$ 边, 或仅含 $[-s_1]$ 边与 $[-s_2]$ 边。为方便起见, 把路径 $x_1[+s_1] + x_2[-s_1] + y_1[+s_2] + y_2[-s_2]$ 用 $(\pm x_1)[+s_1] + (\pm x_2)[-s_1] + (\pm y_1)[+s_2] + (\pm y_2)[-s_2]$ 表示, 比如用 $6[+2] + (-3)[-7]$ 表示 $6[+2] + 3[-7]$ 。

路由算法是影响并行计算的重要因素。文献[11]给出了无向双环网络 $G(n; \pm s_1, \pm s_2)$ (其中, $1 \leq s_1 < s_2 < \frac{N}{2}$, $\gcd(n, s_1, s_2) = 1$) 的一个最优路由算法。此算法利用预先计算好的有向双环网络 $G(n; s_1, s_2)$ L-形瓦 4 个参数及同余方程 $s_1 x + s_2 y \equiv 1 \pmod n$ 一个解 (\bar{x}, \bar{y}) , 常数处理时间就可计算出无向双环网络 $G(n; \pm s_1, \pm s_2)$ 任意两点间的一条最短路径。对于无向双环网络 $G(n; \pm s_1, \pm s_2)$, 欲求从结点 i 到结点 j 的最短路径, 只需求出从结点 0 到结点 $j-i \pmod n$ 最短路径。以下总设结点 0 为源结点。

路由算法 $G(n; \pm s_1, \pm s_2)$ 给定由 $G(n; s_1, s_2)$ 决定的 L-形瓦的 4 个参数 l, h, x, y 及同余方程 $s_1 x + s_2 y \equiv 1 \pmod n$ 的一个解 (\bar{x}, \bar{y}) 。设 $u = l - x, v = h - y$ 。当 $u \geq v$ 时, 计算从 0 到 s 的最短路径^[11]。

Step1 $t := \lfloor \frac{s}{u} \rfloor$; $a := x - tu$; $b := h + tv$ 。

Step2 $(a_1, b_1) := (s - \bar{x}, s - \bar{y}) - \left[\frac{1}{n} (s - \bar{x}, s - \bar{y}) \begin{pmatrix} b & -v \\ a & u \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u & v \\ -a & b \end{pmatrix}$ 。

这里 $(x, y) = ([x], [y])$, $[x]$ 表示对 x 进行四舍五入得到的整数。

Step3 $P_1 := a_1[+s_1] + b_1[+s_2]$; $P_2 := (a_1 - u)[+s_1] + (b_1 - v)[+s_2]$; $P_3 := (a_1 + a)[+s_1] + (b_1 - b)[+s_2]$; $P_4 := (a_1 + u)[+s_1] + (b_1 + v)[+s_2]$; $P_5 := (a_1 - a)[+s_1] + (b_1 + b)[+s_2]$ 。

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 这 5 条路径中的最短者 P 就是从结点 0 到结点 s 的最短路径。

对于无向双环网络 $F_i = G(k_i; \pm 1, \pm s_i)$, 这里 d_i 是大于 1 的正整数, $k_i = 2d_i^2 + 2d_i + 1, s_i = 2d_i + 1$ 。因为由 $G(k_i; 1, s_i)$ 决定的 L-形瓦的 4 个参数为 $l = 2d_i + 1, h = d_i + 1, x = d_i, y = 1$ 及同余方程 $x + s_i y \equiv 1 \pmod{k_i}$ 的一个解 $(1, 0)$ 。令 $u = d_i + 1, v = d_i$ 。

利用上述的路由算法 $G(n; \pm s_1, \pm s_2)$ ^[11], 容易给出下面

的无向双环网络 $F_i = G(k_i; \pm 1, \pm s_i)$ 的最优路由算法。

路由算法 $G(k_i; \pm 1, \pm s_i)$ 由 $G(k_i; 1, s_i)$ 决定的 L-形瓦的 4 个参数为 $l = 2d_i + 1, h = d_i + 1, x = d_i, y = 1$ 及同余方程 $x + s_i y \equiv 1 \pmod{k_i}$ 的一个解 $(1, 0)$ 。令 $u = d_i + 1, v = d_i$ 。/* 计算从 0 到 s 的最短路径。*/

Step1 $a := x; b := h$ 。

Step2 $(a_1, b_1) := (s, 0) - \left[\frac{1}{k_i} (s, 0) \begin{pmatrix} b & -v \\ a & u \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u & -v \\ -a & b \end{pmatrix}$ 。

Step3 $P_1 := a_1[+1] + b_1[+s_i]$; $P_2 := (a_1 - u)[+1] + (b_1 - v)[+s_i]$; $P_3 := (a_1 + a)[+1] + (b_1 - b)[+s_i]$; $P_4 := (a_1 + u)[+1] + (b_1 + v)[+s_i]$; $P_5 := (a_1 - a)[+1] + (b_1 + b)[+s_i]$ 。

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 这 5 条路径中的最短者 P 就是从结点 0 到结点 s 的最短路径。

利用上面的路由算法 $G(k_i; \pm 1, \pm s_i)$, 给出 $F_m \times F_{m-1} \times \dots \times F_1 \times G$ 网络的一个最优路由算法。为了阐述方便, 假设在 m 层双环互连网络的一个节点用 $(X_m, X_{m-1}, \dots, X_1, X_0)$ 表示, 其中, X_i 为 i 层双环网络的节点编号, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, X_0 为在 Petersen 图中的编号。则节点 $(a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$ 到节点 $(b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0)$ 的最优路由算法如下:

(1) 若节点不在同一 Petersen 图, 则:

for $i = m$ to 1

if $a_i \neq b_i$

{沿着 F_i 双环网络层路由。} /* 利用算法 $G(k_i; \pm 1, \pm s_i)$, 找出从 0 到 $b_i - a_i$ 的最短路径, 如此便找到从 $(b_m, b_{m-1}, \dots, b_{i+1}, a_i, a_{i-1}, \dots, a_0)$ 到 $(b_m, b_{m-1}, \dots, b_{i+1}, b_i, a_{i-1}, \dots, a_0)$ 的最短路径*/

(2) 若节点在同一 Petersen 图, 即对 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 均有 $a_i = b_i$ 。若 $a_0 = b_0$, 则结束。若 $a_0 \neq b_0$, 当 a_0 与 b_0 是相邻节点时, 可以直接通信。若节点不相邻, 则要通过公共的相邻节点进行通信。

例 求层次双环网 $F_1 \times G$ (其中, F_1 为无向双环网 $G(61; \pm 1, \pm 11)$) 中节点 $(10, v_1)$ 到节点 $(27, u_2)$ 的最短路由。

根据算法第(1)步, 将沿着 F_1 即无向双环网层 $G(61; \pm 1, \pm 11)$ 路由, 首先节点 $(10, v_1)$ 到节点 $(27, u_2)$ 路由等价于 $(0, v_1)$ 到节点 $(17, u_2)$ 的路由。

利用算法 $G(k_i; \pm 1, \pm s_i)$, 知由 $G(61; 1, 11)$ 决定的 L-形瓦的 4 个参数为 $l = 11, h = 6, x = 5, y = 1$ 。取 $u = 6, v = 5, a = 5, b = 6$; $(a_1, b_1) := (17, 0) - \left[\frac{1}{61} (17, 0) \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = (0, -4)$; 可得

$P_1 := 0[+1] - 4[+11], P_2 := -6[+1] - 9[+11], P_3 := 5[+1] - 10[+11], P_4 := 6[+1] + 1[+11], P_5 := -5[+1] + 2[+11]$ 。可知 P_1 为其中的最短路由, 即为 F_1 无向双环网层 $G(61; \pm 1, \pm 11)$ 的最优路由。节点 $(10, v_1)$ 到节点 $(27, v_1)$ 的最短路径为: $(10, v_1) \rightarrow (60, v_1) \rightarrow (49, v_1) \rightarrow (38, v_1) \rightarrow (27, v_1)$ 。因为 $v_1 \neq u_2$, 从 Petersen 图知 u_1 是 v_1 与 u_2 的公共邻点, 所以有 $(27, v_1) \rightarrow (27, u_1) \rightarrow (27, u_2)$ 。

综上所述, 从节点 $(10, v_1)$ 到节点 $(27, u_2)$ 的最短路径为: $(10, v_1) \rightarrow (60, v_1) \rightarrow (49, v_1) \rightarrow (38, v_1) \rightarrow (27, v_1) \rightarrow (27, u_1) \rightarrow (27, u_2)$ 。

(下转第 96 页)