

# 秘书问题中聘用双方策略研究

杨 城<sup>1</sup>, 康 立<sup>1</sup>, 景小荣<sup>2</sup>

(1. 西南财经大学经济信息工程学院, 成都 611130; 2. 重庆邮电大学通信与信息工程学院, 重庆 400065)

**摘 要:** 秘书问题是一类概率最优化问题, 鉴于现实应用中其理论最优策略缺乏可操作性, 而传统启发式策略仅关注阈值确定, 不涉及阈值和标杆关系的定量分析。为此, 推导“截止阀法则”中阈值与标杆的最优组合关系, 提出一种“三分决策法”聘用策略, 以总量的 1/3 为样本, 并以 1 号~3 号标杆为参照选取目标, 运用多主体系统的建模方法, 对应聘策略进行分等级讨论, 分析 2 种不同竞争模式下, 优劣各异的应聘者在应聘队列中最大化录用概率。应用结果表明, 该策略简便易行, 且有效性能达到最优理论解性能的 95% 以上。

**关键词:** 秘书问题; 截止阀法则; 适应性主体; 多主体系统

## Research on Employing Both Parties Strategy in Secretary Problem

YANG Cheng<sup>1</sup>, KANG Li<sup>1</sup>, JING Xiao-rong<sup>2</sup>

(1. School of Economic Information Engineering, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China;

2. School of Communications and Information Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

**【Abstract】** Secretary Problem(SP) is a kind of probabilistic optimization problem. The best theoretical solution is lack of operability in practice, and heuristic strategies only concern the threshold, without quantitative analysis of the relationship between the threshold and the benchmark. This paper deduces the optimal combination of threshold and benchmark in cutoff rule, and puts forward a simply and practical strategy——trichotomy, which taking the first one-third of the applicants as the sample set with a benchmark of the first to the third one to search the rest of the applicants. Based on Multi-Agent System(MAS) modeling, discusses which position among applicants queue is best for every grade to maximize his probability of being employed. Application result shows that the strategy is simple and easy to operation, its performance reaches 95% of the optimization resolution.

**【Key words】** Secretary Problem(SP); cutoff rule; adaptive Agent; Multi-Agent System(MAS)

DOI: 10.3969/j.issn.1000-3428.2012.03.064

### 1 概述

小学课本中有一篇课文《最大的麦穗》, 讲述古希腊哲学大师苏格拉底带领 3 个弟子经过一片麦田, 要他们挑选一支最大的麦穗, 条件是只能向前走且只有一次选择机会。这其实是一个关于序贯观察与选择的问题, 涉及概率统计、动态规则、运筹及心理等多个领域。生活中类似的问题还有很多, 如求职问题、购房问题、约会问题、低价搜索、新技术采纳等, 学术界一般统称为“秘书问题”(Secretary Problem, SP)。

典型的 SP 问题可简述为: 一位经理以不允许召回的方式(即应聘者一旦被拒绝就不能再选择)从  $N$  位随机排列的应聘者中录用一名秘书, 问经理应该如何决策才是最优的。由于应聘者优劣分布与到达的不确定性, 经理面临一个两难选择的决策权衡问题: 要获得这些不确定信息, 就需要扩大搜索, 而它同时意味着增大错过最优选择的可能性; 而减少搜索则意味着决策的盲目性。

从 SP 问题研究的历史进程看, 早期的研究主要集中于最优解策略的探索, 即运用理论求解的方法计算 SP 问题的精准解答。最优解策略基于完全理性假设, 不仅要求决策者在搜索过程中不受“噪音信息”的干扰和诱惑, 还要求其具有较强的计算能力。显然这样的假设过于苛刻, 使其研究结论失去了实践意义<sup>[1]</sup>。相比之下, 最近的研究则以启发式策略的探索为主, 运用实证研究的方法, 尤其是实验室实验和计算机仿真, 分析决策者的行为特征和搜索规律<sup>[2-4]</sup>。这类研究一般基于有限理性假设, 强调策略选择的满意原则和适应

性、而非最优原则与规范性, 分析决策者偏离最优解策略的原因<sup>[1]</sup>。但纵观这些启发式策略, 无论是截止阀策略、均值标杆策略、次大值标杆策略, 还是数候补者法则、数连续非候补者法则等, 都是围绕截止法则的阈值确定进行探讨, 很少涉及标杆策略变化的情况, 更缺乏对阈值与标杆关系的定量分析。同时, 目前对 SP 问题的分析全部集中于聘用策略的分析, 忽略了对应聘策略的研究, 即聘用方应该如何操作, 才能够使自己从众多应聘者中脱颖而出。

鉴于此, 本文从以下 2 个方面重新分析 SP 问题: (1) 探讨启发式策略中阈值与标杆的关系, 进而提出一种简单高效的聘用策略; (2) 应聘策略分析, 针对不同的 SP 模型, 优劣各异的应聘者该如何选择自己在应聘队列中的位置, 才能最大化录用概率。

### 2 聘用方策略分析

在大多数情况下, 人们追求的往往不是绝对最优解, 而是相对满意解, 即聘用方的决策目标是使录用者尽可能优秀, 或者说录用者的期望名次最小。可见, SP 问题的决策收益仅依赖于备选项(应聘者)的排序值, 而非其真实值, 即决策者更关注备选项的排序分布, 决策的依据是已观察选项的相对排序值。

**作者简介:** 杨 城(1977—), 男, 讲师、博士, 主研方向: 复杂系统仿真, 最优化理论; 康 立、景小荣, 讲师、博士

**收稿日期:** 2011-07-18 **E-mail:** Mr.Yangcheng@163.com

考虑以阈值  $r(r < N-1)$  为分界点, 将  $N$  个备选项划分为 2 个区间: 前  $r$  个选项用来观察和分析, 称为样本区; 目标项  $S$  从后  $(N-r)$  个选项中选出, 称为决策区。将样本区中相对排序值为  $i(i \in [1, 2, \dots, r])$  的选项作为标杆, 即  $S$  必须小于标杆项  $i$  对应的数值, 否则只能以末项顶替(简称“补漏”)。显然, SP 问题的关键是确定阈值  $r$  在  $N$  中的位置以及参照标准——标杆值  $i$ , 它们共同决定了  $S$  的期望排名  $E(N, r, i)$ 。

不妨将这  $N$  个备选项依据大小排序直接设为  $1..N$ , 并将  $r$  个观察样本由小到大排列,  $a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_r$ , 则原命题可转述为: 从  $N$  个有序项中随机抽取  $r$  个样本, 并以  $a_i$  为标杆在余下的  $(N-r)$  个选项中继续随机抽取, 直到找到合适的  $S(S < a_i)$  或全部抽取完毕, 如图 1 所示。

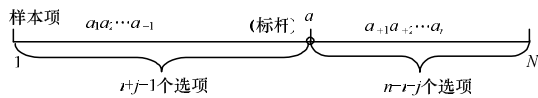


图 1 从  $N$  个项中随机抽取  $r$  个有序化样本的决策示意图

假设在剩余的  $(N-r)$  个选项中有  $j$  个选项比  $a_i$  小(候选项),  $j \in [0..N-r]$ , 则期望排名:

$$E(N, r, i) = \sum_{j=0}^{N-r} \frac{C_{i-} C_{i+}}{C_N} \cdot R_j \quad (1)$$

其中,  $C_{i-}$  表示比  $a_i$  小的选项的组合数。

$$C_{i-} = C_{i+j-1}^{i-1} \quad (2)$$

其中,  $C_{i+}$  表示比  $a_i$  大的选项的组合数。

$$C_{i+} = C_{N-i-j}^{r-i} \quad (3)$$

其中,  $R_j$  为报酬函数, 表示有  $j$  个候选项比  $a_i$  小时  $S$  的期望排名, 它又具体划分为 2 种情况:

(1)  $j > 0$ ,  $S$  为  $j$  个候选项中的第 1 个抽取项, 它可能是比  $a_i$  小的选项中的任意一个(图 1 前半段):

$$R_{j>0} = \frac{i+j}{2} \quad (4)$$

(2)  $j=0$ (简称“脱靶”, 即标杆太高, 无法找到合格选项),  $S$  为最后一个抽取项, 它可能是比  $a_i$  大的选项中的任意一个(图 1 后半段):

$$R_{j=0} = \frac{N+i+1}{2} \quad (5)$$

利用下面的组合恒等式:

$$\sum_{k=0}^n C_{p+k}^p C_{q+n-k}^q = C_{p+q+n+1}^{p+q+1} \quad (6)$$

式(1)可进一步化简为:

$$E(N, r, i) = \frac{N+1}{2} \left( \frac{i}{r+1} + \frac{P(r, i)}{P(N, i)} \right) \quad (7)$$

因此, 聘用方的满意解策略就是令式(7)的值最小化的参数组合, 即:

$$(r^*, i^*) = \min \{ N-1 \geq r \geq i \geq 1 : E(N, r, i) \} \quad (8)$$

### 3 三分决策法

为了对比分析不同  $N$  值秘书策略的性能, 将期望排名  $E$  进行归一化处理, 用最终选项  $S$  在整个选项集中的百分比排名(Percent Rank, PR)作为策略优劣的评判标准:

$$PR = \frac{[\text{大于} S \text{的项数}]}{[\text{不等于} S \text{的项数}]} \times 100\% = \frac{N-E}{N-1} \quad (9)$$

显然,  $PR \in [0..100\%]$ ,  $PR$  值越大策略越优秀: 当  $S$  为最小项时,  $PR=100\%$ ; 当  $S$  为最大项时,  $PR=0$ 。

应用 Maple 软件对式(8)进行定量分析和作图比较, 计算

具体  $N$  值在不同参数组合下的期望百分比排名, 从中搜索最大值  $PR^*$ , 及其对应的决策参数  $(r^*, i^*)$  和脱靶概率  $P_{j=0}$  ( $C_{N-r}^{r-i} / C_N^r$ ), 仿真结果如图 2 所示, 其中,  $a$  表示最优期望百分比排名  $PR^*$ ,  $b$  表示最优阈值比例  $r^*/N$ ,  $c$  表示最优标杆系数  $i^*$ ,  $d$  表示脱靶概率  $P_{j=0}$ ,  $e$ 、 $f$  分别表示三分决策法和最优截止阀策略相对于理论最优解 Chow 策略的有效比。

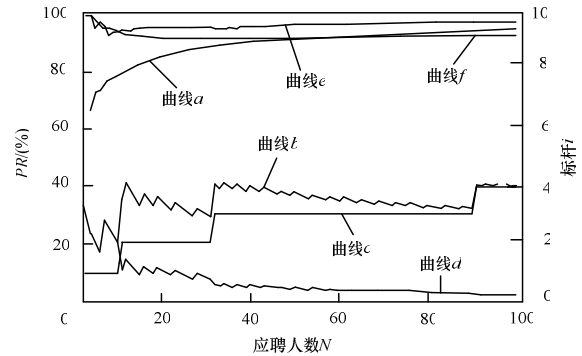


图 2 不同  $N$  值( $N=3,4,\dots,100$ )对应的最优决策方案

图 2 表明除  $N$  值较小的情况外,  $PR^*$  值都在 85% 以上, 并随着  $N$  值继续上升; 而对应的脱靶概率  $P_{j=0}$  基本维持在 10% 以下并持续下降, 表明该方案具有很高的稳定性。同时,  $r^*/N$  曲线大体在 0.3~0.4(近似  $N/3$ ) 上下波动, 而标杆系数  $i^*$  主要集中于 1~3。基于这些特征, 本文提出一种“三分决策法”的近似策略: 将截止阈值设定在  $N/3$  处, 并配合适当的标杆系数, 就能够获得平均  $PR$  值在 85% 以上的满意解。尤其在应用中, SP 问题的备选项很少超过 90, 因此只需记住 2 个标杆系数  $i^*$  的跳跃点(10, 31), 即 10 以内取最大值标杆, 11~31 取次大值标杆, 31 以外取第 3 号标杆, 决策者就可以推算出一个近似的最优解策略( $r=N/3, i^*=1, 2, 3$ )。对比分析显示, 三分决策法相对于理论最优解 Chow 策略的有效比基本在 95% 以上, 并且继续趋近于 1, 说明它是最优解策略的一种切实可行的简化替代方案(曲线  $e$ ); 同时, 相对于以最优截止阀策略为代表的传统启发式策略则具有明显的优势(曲线  $f$ )。

不仅如此, “三分决策法”还可以进一步由近似满意解向理论最优解转化, 即由单一阈值的启发式策略转化为 Chow 式多阈值的最优解策略(如果第  $j$  个申请者的相对名次为  $x$ , 并且  $x \leq r_j^*$ , 则停止面试录用它, 其中  $r_j^*$  表示一个动态的截止阈值, 它是一个相对期望排名<sup>[5]</sup>)。例如, 下面先推导双阈值的情况, 然后再推广到任意多阈值。

参照式(1), 令  $r_1$ 、 $r_2$  为 2 个大小不同的截止阈值, ( $1 < r_1 < r_2 \leq N-1$ ),  $i_1$ 、 $i_2$  分别为 2 个阈值对应的标杆 ( $i_2 > i_1 \geq 1$ )。此时, 整个挑选过程可划分为 3 步: (1) 抽取  $r_1$  个样本; (2) 以  $i_1$  为标杆在后续的  $r_2 - r_1$  个选项中挑选; (3) 若第(2)步未能找到符合标杆  $i_1$  条件的期望选项, 则以  $i_2$  为标杆在剩余的  $N - r_2$  个选项中继续搜索。

此时, 双阈值对应的期望排名为:

$$E_2(N, r_1, r_2, i_1, i_2) = \sum_{j=0}^{N-r_1} \frac{C_{i_1-} C_{i_1+}}{C_N^{r_1}} \cdot (P_j \cdot R_j + \bar{P}_j \cdot E_j') \quad (10)$$

其中,  $C_{i_1-}$ 、 $C_{i_1+}$  和  $R_j$  与式(1)相同, 只需把式(2)~式(5)中的  $r$  替换为  $r_1$ ,  $i$  替换为  $i_1$ ;  $P_j$  表示恰有  $j$  个小于标杆  $i_1$  的候选项在第 1 个截止阀  $r_1$  后面时, 其中至少有一个落在区间  $(r_1, r_2]$  的概率,  $\bar{P}_j$  为其补集;  $E_j'$  表示当上述  $j$  个针对标杆  $i_1$  的候选

项全都位于第2个截止阀 $r_2$ 后面, 即区间 $(r_2, N]$ 时, 标杆 $i_2$ 对应的期望排名:

$$E'_j(N, r_2, i_2) = \sum_{j_2=j}^{N-r_2} \frac{C_{i_2} C_{j_2}}{C_N} \cdot R_{j_2} \quad (11)$$

式(11)右边的累加项部分同样与式(1)类似, 将其中 $r$ 替换为 $r_2$ ,  $i$ 替换为 $i_2$ ,  $j$ 替换为 $j_2$ 即可。

如果将式(11)中的 $E'_j$ 继续迭代下去, 则可以计算任意多个截止阀的期望排名 $E_n(N, r_1, \dots, r_n, i_1, \dots, i_n)$ 。当 $r_n = N-1$ 时,  $E_n$ 值达到真正的全局最优, 即为动态标杆的最优期望排名。

#### 4 应聘方策略分析

在SP问题中, 不仅聘用方存在策略最优化问题, 应聘方同样存在类似的策略问题——如何使自己被录用的概率最大。例如, 摊位地点的选择问题、选秀出场的顺序问题、商品报价的次序问题等, 这些都属应聘策略的相关应用。

相比较而言, 聘用策略主要运用概率理论进行计算分析, 而应聘策略较为复杂, 它同时受聘用双方状况的影响, 即聘用方的决策方案和应聘方的自身实力(绝对名次)。其中, 前者受主客观多种因素的影响且往往不为应聘方知晓, 通常以其平均状态作为参考; 而对于自身名次, 应聘方虽然无法精确定位——这与他们的信息渠道和聘用方的主观评价有关, 但定位自己在整个应聘队列中的大致等级是可能的。

由于影响应聘策略的不确定因素过于复杂, 理论分析比较困难, 因此采用基于复杂适应系统理论(Complex Adaptive System, CAS)的多主体建模思想进行仿真, 将应聘者设计为适应性主体(adaptive agent), 能够根据环境状况自主选择排位策略, 并通过遗传算法不断学习进化<sup>[6]</sup>(在下面的叙述中, Agent与应聘者是等价的)。具体而言, 将Agent的排位策略用6位二进制串表示, 对应总共 $2^6$ 档位置。系统首先依据所有Agent的意向选位排列应聘者, 当多个Agent的意向选位相同时, 彼此间随机排序。同时, 所有Agent按绝对名次划分为优-良-中-差四等, 分别代表应聘队列中的前10%, 中间15%、25%和最后50%的应聘者。并且, 不同等级的Agent分别进化, 即遗传迭代只在自己同类型的Agent内部运行, 应聘者只向同等级的Agent学习模仿。此外, 为保证每个等级Agent的群体数量充足, 模型内设100组SP实验, 彼此独立并行, 然后对其平均状态量进行统计分析。

在仿真模型中, 对聘用策略的设计要考虑其应用的现实性和一般性, 因此既不可能采用理论最优策略, 也不可能采用某种单一的启发式策略。最近的实证研究表明, 聘用方往往偏离最优解策略, 在最优截止阈值前停止搜索, 或者说倾向于较少的搜索数量<sup>[1,7]</sup>。因此, 参考本文的三分决策法, 将聘用方的截止阈值设定为区间20%~40%之间的一个任意点。同时, 标杆值的设计也不采用复杂的动态标杆或单一的最大值、次大值标杆, 而是依据阈值与标杆的最优组合关系, 并结合实证研究中标杆值偏高的趋势特点, 设置一个概率标杆区间:  $N$ 值在10以内取最大值标杆, 11~31随机选择一二号标杆, 31以外随机选择二三号标杆。

下面具体讨论2种不同竞争模式下的应聘策略: (1)所有应聘者都是适应性主体, 可以自主选择排位策略; (2)只有一个应聘者是适应性主体, 其余个体在应聘队列中随机分布。

模式(1)是一个多方博弈问题, 决策的依据不仅取决于前面提到的聘用策略和自身名次, 还取决于其他各等级Agent的选择。图3显示 $N=60$ 时, 不同等级Agent排位策略的演化过程, 其中 $N=60$ , 优良中差四等的平均策略曲线依次为曲

线a、曲线b、曲线c、曲线d。

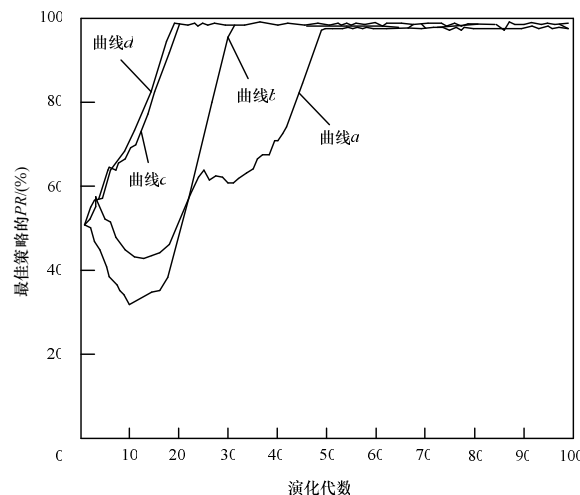


图3 不同等级 Agent 排位策略演化

图3是所有应聘者都是适应性主体时不同等级Agent排位策略演化, 中差等级的Agent由于名次靠后, 被主动录用的概率很小, 因此首先盯住队列末尾, 寄希望于聘用方因标杆值过高导致脱靶, 从而以补漏的方式被录用。优良等级的Agent虽然一开始选择前插到某个合适的位置, 但由于谁也不愿落入队列前端约1/3的样本区域(零概率录用), 因此当队列主体选择补漏后, 他们也被迫先后转为“补漏”策略。此时, 系统达到演化博弈均衡状态, 最终结果等同于所有应聘者随机排序。仿真数据显示, 优良中差4等在稳定态的平均录用率依次为0.750、0.192、0.028和0.030, 即录用者集中于优良等级, 而中差等级的整体录用率略小于图2中对应的理论脱靶概率 $P_{j=0}$ 。

模式(2)是一个条件最优化问题, 其模型结构与模式(1)类似, 但每次只对某一特定等级的Agent进行演化, 并且每组SP实验仅包含一个适应性主体, 其余应聘者随机排序。图4是 $N=10 \sim 100$ 时, 不同等级Agent对应的最佳排位策略的演化图。其中,  $N=10, 20, \dots, 100$ , 优良中差4等的最优策略曲线依次为曲线a、曲线b、曲线c、曲线d(曲线c和曲线d重叠)。

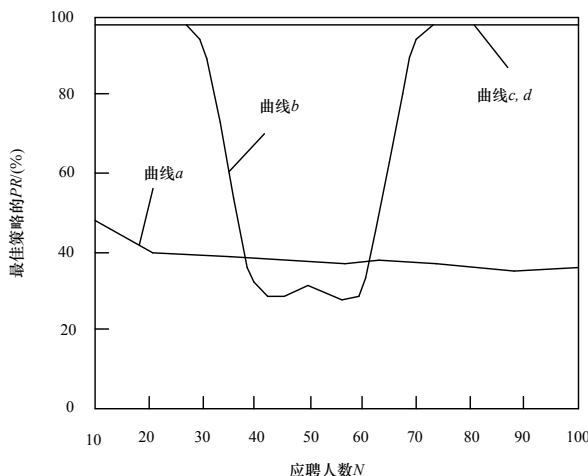


图4 不同  $N$  值条件下各等级 Agent 对应的最佳策略

图4是只有一个应聘者是适应性主体时不同 $N$ 值条件下各等级Agent对应的最佳策略, 中差等级Agent的策略基本无变化, 无论有多少应聘者, 自始至终采取补漏策略, 定位

于应聘队列末尾。优等 Agent 的策略也比较简单和稳定：盯住截止阈值，尽可能成为决策区最先出现的优等 Agent，同时避免因过于靠前而落入样本区。因此，它们往往选择前插到截止阈区间的末尾，即大约 40% 的位置。而良等 Agent 介于优等与中差等级之间，策略相对复杂：当  $N$  值较小时 ( $N < 30$ )，优等 Agent 全部落入样本区的概率较大，容易出现脱靶，故选择补漏；随着应聘队列增长，标杆下调，最优策略逐渐偏向前插；当应聘队列继续增长， $N$  值较大时 ( $N > 70$ )，良等 Agent 在避免落入样本区的情况下很难同时保证前面只有 1 名~2 名更优秀的应聘者，故策略又转回补漏。图 2 中脱靶概率曲线的走势也印证了以上良等策略的分析：当  $N$  值较小时， $P_{j=0}$  相对较大，有利于补漏；当  $N$  过大时，前插的机会越来越小，而  $P_{j=0}$  下降缓慢，变化不明显，故依旧选择补漏。此外，图 4 的中段部分，虽然同样选择前插策略，但由于良等 Agent 具有更多的潜在对手，因此它们会冒更大的(落入样本区的)风险选择相对于优等 Agent 更靠前的位置。

## 5 结束语

秘书问题本质上是一类概率问题，对聘用双方而言，选取最优秀的秘书或者百分百录用都是不现实的，但选择相对满意的理想秘书或最大化录用概率是完全可行的。对于聘用方而言，由于理论最优解实践性差，现实中缺乏可操作性，因此人们更倾向于简单实用的启发式策略。本文通过分析截止阈策略中阈值与标杆的最优组合关系，提出了三分决策法的近似策略方案。该策略不仅简便易行，而且有效性达到最优理论解性能的 95% 以上，能够录取到平均  $PR$  值 85% 以上的理想人选。

对于应聘方而言，在聘用策略既定的情况下，最大化录

用概率的关键是制定与自身名次相当的排位方案。一般而言，优等应聘者选择前插于截止阈之后，中差等级的选择末尾补漏，而良等的应聘者则需要根据情况在前插与补漏之间轮换。需要指出的是，以上应聘策略的分析重点在其思想，而非具体数值。如果修改模型参数，例如调整等级比例、阈值区间或标杆概率，可能会导致排位策略变化，但基本的策略思想和趋势是不变的。

## 参考文献

- [1] 刘庆顺, 王 渊, 王刊良. 秘书问题研究综述: 何时停止搜索信息[J]. 数理统计与管理, 2009, 28(1): 69-81.
- [2] 刘庆顺, 王 渊, 刘惠敏, 等. 基于有限理性假设的秘书问题研究[J]. 管理科学, 2007, 20(2): 91-97.
- [3] Bearden J N, Rapoport A, Murphy R O. Sequential Observation and Selection with Rank-dependent Payoffs: An Experimental Study[J]. Management Science, 2006, 52(9): 1437-1449.
- [4] Seale D A, Rapoport A. Sequential Decision Making with Relative Ranks: An Experimental Investigation of the "Secretary Problem"[J]. Organizational Behavior and Human Decision Processes, 1997, 69(3): 221-236.
- [5] Chow Y S, Moriguti S, Robbins H, et al. Optimal Selection Based on Relative Rank[J]. Israel Journal of Mathematics, 1964, 2(2): 81-90.
- [6] 杨 城, 谢志龙. 复杂适应系统的多层级建模研究[J]. 计算机工程, 2009, 35(22): 244-247.
- [7] Thomas D, Peter M T. Making Good Decisions with Minimal Information: Simultaneous and Sequential Choice[J]. Journal of Bioeconomics, 2001, 3(2): 195-215.

编辑 索书志