

具有 Hub 聚集特性的分形网络优化模型分析

姚 琪¹, 殷 智², 易云飞^{1,3}, 李元香¹

(1. 武汉大学 计算机学院 软件工程国家重点实验室, 武汉 430072;

2. 河池市人民政府办公室, 广西 河池 547000; 3. 河池学院 计算机与信息工程学院, 广西 宜州 546300)

摘 要: 针对一种双目标优化网络模型具有 Hub 节点聚集行为的现象, 提出分形的涌现与 Hub 节点的聚集行为有关的结论。采用盒子覆盖法对该模型的 3 种优化网络进行重整化, 验证该模型存在分形性和尺度不变性。进一步比较一些真实网络和优化网络的平均最短路径, 分析骨架结构的分形临界条件。实验结果表明, 分形网络只要满足结构平衡, 就具有确定比例的 Hub 节点聚集和 Hub 节点排斥行为。

关键词: 优化模型; 分形网络; 重整化; 复杂网络; 盒子覆盖法

中文引用格式: 姚 琪, 殷 智, 易云飞, 等. 具有 Hub 聚集特性的分形网络优化模型分析[J]. 计算机工程, 2017, 43(4): 239-243.

英文引用格式: Yao Qi, Yin Zhi, Yi Yunfei, et al. Optimization Model Analysis on Fractal Network with Hub Aggregation Property[J]. Computer Engineering, 2017, 43(4): 239-243.

Optimization Model Analysis on Fractal Network with Hub Aggregation Property

YAO Qi¹, YIN Zhi², YI Yunfei^{1,3}, LI Yuanxiang¹

(1. State Key Laboratory of Software Engineering, School of Computer, Wuhan University, Wuhan 430072, China;

2. Hechi Municipal People's Government Office, Hechi, Guangxi 547000, China;

3. College of Computer and Information Engineering, Hechi University, Yizhou, Guangxi 546300, China)

[Abstract] Aiming at the bi-objective optimization network model, which has the Hub node aggregation behaviors, the conclusion that the origin of the fractality is associated with the aggregation behaviors of Hub node is presented. The box-covering method is used to regularize the three optimization networks of the model, verify fractal properties and scale invariance. The average shortest path of some real networks and optimized networks is further compared. The critical condition of the skeleton structure is analysed. Experimental result shows that as long as the structural equilibrium of the fractal network is satisfied, certain proportion of Hub node aggregation and Hub node exclusion behaviors is available.

[Key words] optimization model; fractal network; renormalization; complex network; box-covering method

DOI: 10.3969/j.issn.1000-3428.2017.04.041

0 概述

复杂网络的拓扑特性中有 2 个最重要的发现: 小世界效应和无标度特性。小世界效应, 也叫作“六度分离”, 起源于社会网络, 是指大部分节点可以通过很短的路径到达各个节点^[1-2]; 另一个关键的属性是它的度分布服从幂律分布^[3-5]。

文献[6]分析了复杂网络的分形起源, 并从网络演化的角度提出了基于 Barabási-Albert 模型的 2 个增长模型。其中一个模型有 Hub 节点排斥行为(Hub 节

点倾向于连接那些度数小的节点), 另一个模型有 Hub 节点吸引行为(Hub 节点倾向于 Hub 节点相连, 度数小的节点倾向于连接到度数小的节点)。结果表明, Hub 节点排斥模型生成分形网络, Hub 节点吸引模型产生非分形网络。因此得出结论, Hub 节点排斥行为是产生分形的原因。而文献[7]提出的异配性是分形产生的原因, 也与文献[6]的观点吻合。

本文发现文献[8]的优化模型具有分形特性, 该模型的 Hub 节点之间的平均距离非常短, 并且度相关性表现出强烈的同配性。这些结果表明该模型的分

基金项目: 国家自然科学基金(61170305); 国家级大学生创新创业训练计划项目(201610605029); 河池学院科研启动经费课题(XJ2016KQ01)。

作者简介: 姚 琪(1989—), 男, 硕士研究生, 主研方向为智能计算、复杂网络、演化计算; 殷 智, 硕士; 易云飞(通信作者), 副教授、博士; 李元香, 教授、博士生导师、CCF 高级会员。

收稿日期: 2015-12-29 **修回日期:** 2016-04-12 **E-mail:** gxyiyf@163.com

形特征与以往分形涌现的原因不同。此外,还研究了该模型的骨架结构的临界条件,发现该模型符合分形涌现的临界条件。根据这个结论,推出分形的涌现可能是由于网络中存在结构平衡。最后,通过对比真实网络的网络直径和节点数量进行验证。

1 相关技术

连接度为 k 的节点数目的概率 $P(k)$ 服从公式:

$$P(k) \approx k^{-\gamma} \quad (1)$$

在自然界中存在许多不规则的现象,如山川、河流等,在欧几里德几何中,形状的拓扑维度是常数,所以这些自然现象无法用传统的几何术语来描述^[9]。为了解释分形维度超过它的拓扑维度的数学集合,文献[10]提出了分形几何理论。为了揭开复杂网络的潜在特征,许多研究人员专注于复杂网络的分形特征。分形性意味着,覆盖整个网络的盒子的数量 N_B 约等于底数为盒子大小 γ , 幂为 $-d_B$ 的幂律函数。这个性质用公式表示如下:

$$N_B(\ell_B) \approx \ell_B^{-d_B} \quad (2)$$

尺度不变性表明不同尺度下的重整化网络的度分布仍然服从幂律分布。盒子作为新的节点和盒子间的连接组成新的重整化网络。尺度不变性定义如下:

$$p(k') \approx k'^{-\gamma} \quad (3)$$

$$k' = S(\ell_B)k \quad (4)$$

其中, k' 是重整化网络的节点度; k 是重整化网络中盒子的最大度; $S(\ell_B)$ 表示度缩放的比例因子, 与 ℓ_B 呈幂律关系。

2 盒子覆盖法

文献[11]基于复杂网络分形特性的研究吸引了广泛的关注。将重整化群分析法引入复杂网络, 并利用盒子覆盖法来实现, 即用给定大小的盒子覆盖整个网络。通过这个过程, 发现许多真实网络, 例如蛋白质交互网络、细胞网络, 都具有分形性和尺度不变性。

盒子覆盖法定义为: 用最少的边为 ℓ_B 的盒子覆盖整个网络。盒子覆盖法是最被认可的定义尺度不变性和分形的方法。研究者提出了许多解决盒子覆盖问题的算法, 例如贪婪着色法^[12]和随机燃烧法^[13](选取随机节点作为盒子的种子, 然后一步一步地燃烧邻居节点), 还有边覆盖法^[14]。文献[15]提出的优化算法在之前的算法上盒子数量有很大的改进。本文采用广泛使用的贪婪着色法。

盒子覆盖问题可以转化为在对偶网络 G' 上的顶点着色问题。顶点着色问题就是找到最少颜色数目来给整个网络着色。根据规则: 2 个相连的节点必须

采用不同的颜色进行着色。对偶网络 G' 的构建方法: 如果 2 个节点之间的最短路径不大于盒子大小 ℓ_B , 则连接 2 个节点。给定一个有 7 个节点的图 G , 生成它的对偶网络 G' , 设置盒子大小分别为 $\ell_B = 3$ 和 $\ell_B = 4$ 。然后运用贪婪着色算法来覆盖对偶网络 G' 。因此得到, $\ell_B = 3$ 时 $N_B(3) = 3$, $\ell_B = 4$ 时, $N_B(4) = 2$ 。最后, 从 $\ell_B = 1$ 到 $\ell_B = \ell_{\max}$, 通过迭代计算对偶网络 G' 上的着色数目, 可以得到式(2)中定义的网络中的分形度。

重整化过程通过对网络进行不同盒子大小 ℓ_B 的着色, 来实现不同尺度上的缩放。图 1 通过把盒子当作新的节点然后连接不同的盒子作为新的边, 来重构网络。如图 1 所示, 对于盒子 $a, k' = 1, k = 2$, 对于盒子 $b, k' = 2, k = 2$, 对于盒子 $f, k' = 1, k = 3$ 。

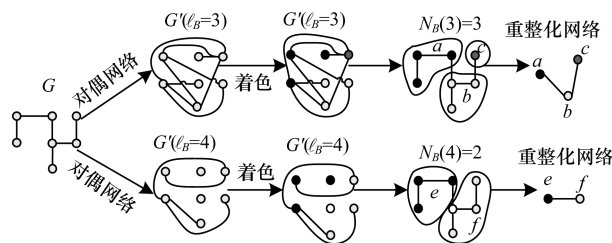


图 1 盒子覆盖问题转化为图着色问题流程

3 优化网络特征分析

3.1 优化模型

文献[10]提出了一个复杂网络的优化模型。该模型有 2 个优化目标: 最小化节点度的总和, 最大化边的度的总和。节点 i 和节点 j 之间边的度定义为:

$$D_{ij} = d_i^a d_j^b \quad (5)$$

其中, d_i 和 d_j 分别为节点 i 和节点 j 的度; a 和 b 都是非负常量。另外, 该模型有 2 个约束条件: 平均最短路径 $\bar{\ell}$ 和网络中度数最小的节点数 x_{\min} 收敛到预定的非负常量。本文选择了 3 个优化网络, 即 FractalEvo1, FractalEvo2, FractalEvo3, 采取的参数值如表 1 所示。这 3 个无标度网络所服从的幂律函数的幂指数 $\gamma = 3.16, 2.13$ 和 3.0 。

表 1 优化网络的参数

网络	N	x_{\min}	$\bar{\ell}$	γ
FractalEvo1	300	3	6	3.16
FractalEvo2	300	2	7	2.13
FractalEvo3	1 500	2	40	3.00

图 2 和图 3 分别为重整化优化网络 FractalEvo1, FractalEvo2 的过程。在图 2 中, 盒子大小为 $\ell_B = 3$ 。FractalEvo1 网络节点数为 300, $x_{\min} = 3, \gamma = 3.16, \ell_B = 6$ 。在图 3 中, FractalEvo2 网络节点数为 300, $x_{\min} = 2, \gamma = 2.13, \ell_B = 7$ 。

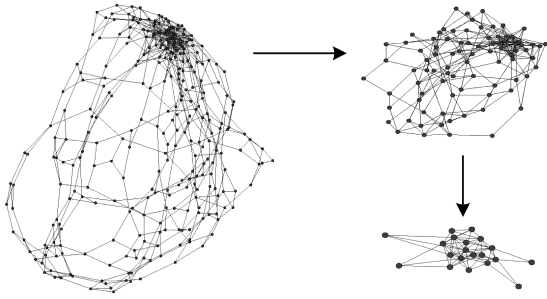


图 2 FractalEvo1 网络

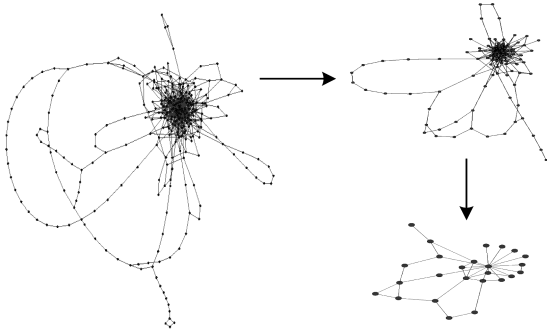


图 3 FractalEvo2 网络

3.2 优化网络的分形特性

图 2 和图 3 展现了对盒子大小为 3 的 FractalEvo1 和 FractalEvo2 网络的重整化过程。可以看出重整化下的优化网络的尺度不变性, 即 Hub 节点集聚性, 其他节点集聚在 Hub 附近类似于星型 (FractalEvo1) 或星轨 (FractalEvo2)。FractalEvo1 网络的尺度不变性如图 4 所示, 网络的度分布服从式 (4) 的分布。FractalEvo1 网络和重整化网络的度分布服从相同指数 $\gamma = 3.16$ 的幂律分布。在图 4 中, $N_B(\ell_B)/N \sim \ell_B$ 的双对数坐标图。在图 5 中, 用大小为 ℓ_B 的盒子重整化 FractalEvo1 网络所表示出的度分布不变性。比较初始 FractalEvo1 网络和用大小为 $\ell_B = 2$ 和 $\ell_B = 3$ 和重整化之后网络的度分布。内部插图是对于不同的 $\ell_B, k' = S(\ell_B)k$ 的比例。优化网络显示出分形特性。如图 4 和图 5 所示, 随着盒子大小 ℓ_B 变化, 盒子数目 N_B 服从严格的幂律分布。FractalEvo1 的指数 $d_B = 2.078$, FractalEvo2 的指数 $d_B = 1.519$, FractalEvo3 的指数 $d_B = 1.382$ 。

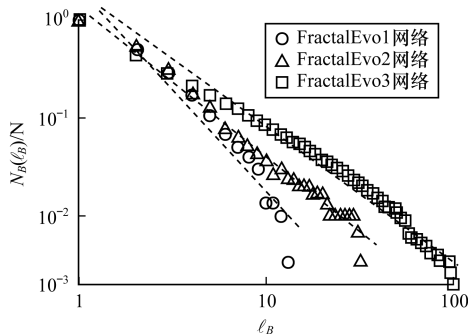


图 4 3 种网络的分形特性

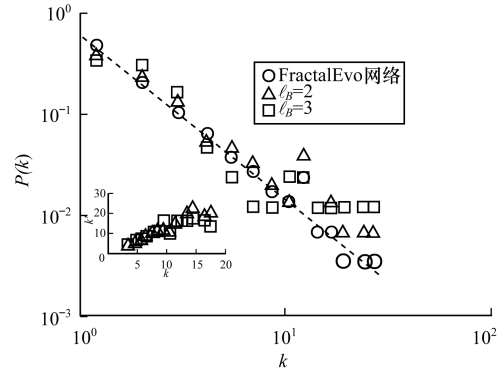


图 5 FractalEvo1 网络的尺度不变性

3.3 优化网络的 Hub 节点聚集性

从图 2 和图 3 的拓扑图可以看出, 优化网络有非常明显的 Hub 节点聚集行为。这里提出了参数 $\langle M_\Omega(t) \rangle$ 来测量 Hub 节点平均最短路径, 在所有节点的集合 Ω 中, 选择 t 个连接度最大的节点, 公式定义如下:

$$\langle M_\Omega(t) \rangle = \frac{\sum_{i \in \Omega, j \in \Omega, i \neq j} \ell_{ij}}{t(t-1)} \quad (6)$$

在图 6 中, 通过 3 个优化网络验证。Hub 节点聚集行为即 Hub 节点间的距离很小, 3 个 $\langle M_\Omega(t) \rangle$ 都在 $[1, 2]$ 之间, 这表明了 Hub 节点具有很强的聚集性。

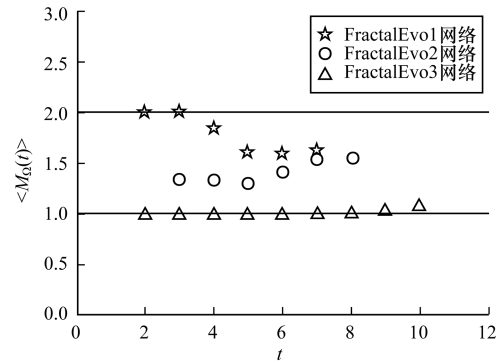


图 6 Hub 节点间的平均最短距离

邻居相关度 $\langle k_{nn} \rangle$ 通常用来分析节点的相关性。参照文献 [16], $\langle k_{nn} \rangle$ 定义为:

$$\langle k_{nn} \rangle = \sum_k k' P(k'|k) \quad (7)$$

其中, $P(k'|k)$ 为度为 k 的节点连接度为 k' 的节点的条件概率。图 7 显示了 3 个优化网络都是同配的, 因为斜率是正数, 这表明度数大的节点倾向于连接度数大的节点 [17]。

图 7 表明 3 个优化网络都是同配网络, 这意味着度数大的节点倾向于连接度数大的节点。可以看出, Hub 节点排斥行为在某些情况下可以被看作分形特性产生的原因, 但是因为发现了反例, 证明 Hub 节点排斥不是分形产生的充分条件。文献 [7] 把异配性看作产生自相似的原因。然而, 本文的结果表

明同配网络具有自相似性和分形。因此,复杂网络分形起源的深层原因需要进一步发掘。

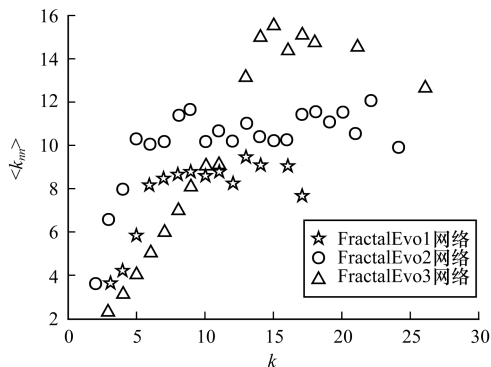


图 7 邻居相关性

4 分形网络的结构平衡

为了解释网络中分形结构涌现的原因。认为分形网络中有结构平衡^[18],以保持平均最短距离 $\bar{\ell}$ 和节点数目的对数 $\log N$ 的比例在一定的范围内。根据复杂网络的拓扑结构,按照文献[19]里提到的,将一个网络分成几个层。最大连接的 Hub 节点,被当作中心,其他的节点根据它们到 Hub 节点的距离分配在不同的层。Hub 节点吸引性和边界的大幅增长是成对出现的,具有相反的力量,它们互相作用来维持结构平衡。Hub 节点吸引性导致 $\bar{\ell}$ 大幅下降,边界的生长导致 $\bar{\ell}$ 大幅增加。

本文比较了 6 个网络的各种特性:

网络 1 是酿酒酵母的代谢产物在代谢周期中的相互作用(包含 1 511 个节点,3 807 条边)网络。每个节点代表一个酿酒酵母细胞中的一个代谢产物,它们之间的边表示它们之间的化学反应。

网络 2 是出芽酵母(2 361 个蛋白质)的蛋白质相互作用网络,如果它们之间有物理的交互作用,则它们互相连接。生物学家提出蛋白质绑定在一起来校准它们的函数。

网络 3 是一个因特网自治系统拓扑图(包含 22 963 个节点),来源于边界网关协议的路由表。路由表中的每个条目列出了自治系统的路径,用于寻址。

网络 4 ~ 网络 6 分别是优化模型生成的网络:FractalEvo1, FractalEvo2 和 FractalEvo3。

这 6 个网络都是无标度的。酿酒酵母网络和出芽酵母网络都是 Hub 节点排斥的分形网络,因特网是非分形网络,在前文已经表明优化网络是 Hub 节点聚集分形网络。

表 2 比较了各个网络最基本的元素:节点数目 N ,节点数目的对数 $\log N$,6 个网络的平均最短路径 $\bar{\ell}$ 。比较 $\bar{\ell}/\log N$,显然非分形网络(Internet 网络)中该值最小。

表 2 不同网络的平均最短路径和节点数目的对数

类别	N	$\log N$	$\bar{\ell}/\log N$	分形
Internet	22 963	10.04	0.365	否
酿酒酵母	1 511	7.32	0.615	是
出芽酵母	2 361	7.77	0.563	是
F. Evo1	300	5.70	1.228	是
F. Evo2	300	5.70	1.052	是
F. Evo3	1 500	7.31	5.472	是

将因特网小的 $\bar{\ell}$ 归因于 Hub 节点的吸引性,这导致了平均最短路径大幅下降。然而,FractalEvo 网络具有 Hub 节点吸引行为,显示了结构平衡的分形特性。它表明,Hub 节点吸引行为导致 $\bar{\ell}$ 下降,能通过边界的大幅增长来提高。

而且,运用具有最大边介数的生成树^[20],即骨架图,来测试无标度网络的分形尺度,也说明了分形网络存在结构平衡的特征。该文认为分形网络满足临界条件:骨架图具有分支结构,从根节点(最大连接度节点)开始持续性地生长,后代节点既不生长也不消亡。这个临界条件也就是网络均衡与非均衡的临界点。骨架图的分支影响了距离分布,因为大部分最短路径不得不通过骨架图中的节点。骨架图消失的分支率与 Hub 节点聚集性一致,茂盛的分支树和边界节点多相匹配。图 8 ~ 图 10 分别显示了 FractalEvo1, FractalEvo2, FractalEvo3 网络的骨架图分支率,更进一步地证明了这 3 个网络是分形网络。

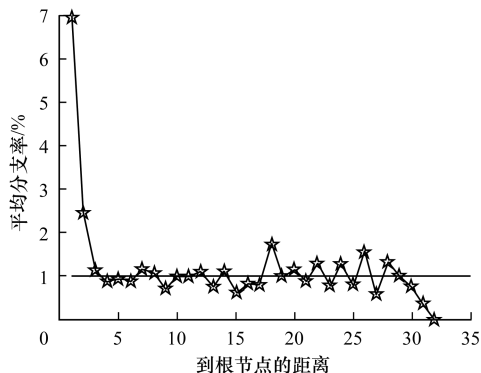


图 8 FractalEvo1 网络

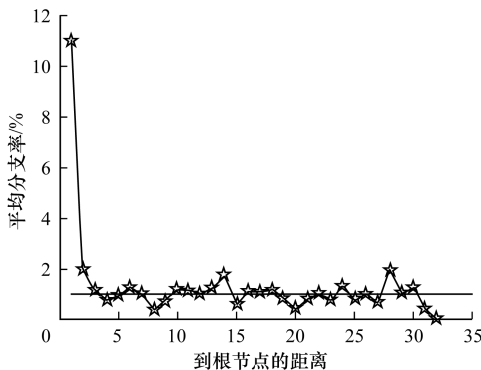


图 9 FractalEvo2 网络

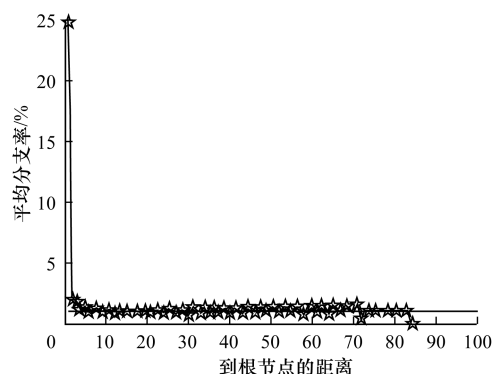


图10 FractalEvo3 网络

在图8~图10中,平均分支数目作为从根到骨架图的距离的函数。这些网络的骨架图满足确定的条件,平均分支比例 $\langle m \rangle = 1$ (到根的距离) 增加。基于以上论述可以推断,只要网络满足结构平衡条件,就会成为分形网络。但是困难在于怎样从理论上定义分形网络的结构平衡。

5 结束语

本文介绍了复杂网络分形特性研究中经常使用的盒子覆盖法,采用该方法对 FractalEvo1, FractalEvo2, FractalEvo3 这3个优化网络进行重整化,发现优化网络同时具有分形特性和Hub节点聚集行为。以前的研究人员一致认为Hub节点排斥行为是分形的起源。这说明同配网络同样具有自相似性和分形。通过比较酿酒酵母的代谢产物相互作用网络、出芽酵母的蛋白质相互作用网络、Internet网络、FractalEvo1、FractalEvo2和FractalEvo3优化网络,发现FractalEvo网络具有结构平衡的特性。然后通过比较FractalEvo1, FractalEvo2和FractalEvo3优化网络的骨架图分支率,证明分形特性和Hub节点聚集行为可以同时存在。下一步将运用数学方法找出距离分布和分形维度之间的定量关系。

参考文献

- [1] Watts D J, Strogatz S H. Collective Dynamics of Small-world Networks[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.
- [2] 王子昊. 确定性小世界网络中的搜索[D]. 杭州: 浙江大学, 2013.
- [3] Newman M E J. The Structure and Function of Complex Networks[J]. SIAM Review, 2003, 45(2): 167-256.
- [4] Barabási A L, Albert R. Emergence of Scaling in Random Networks[J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.
- [5] Waclaw B. Statistical Mechanics of Complex Networks[J]. Review of Modern Physics, 2002, 74(1): 47-97.
- [6] Song Chaoming, Havlin S, Makse H A. Origins of Fractality in the Growth of Complex Networks[J]. Nature Physics, 2005, 2(4): 275-281.
- [7] Yook S H, Radicchi F, Meyer-Ortmanns H. Self-similar Scale-free Networks and Disassortativity[J]. Physical Review E, 2005, 72(4): 138-148.
- [8] 王江涛, 杨建梅. 复杂网络的分形研究方法综述[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2013, 10(4): 1-7.
- [9] Mandelbro B B, Wheeler J A. The Fractal Geometry of Nature[M]. [S. l.]: Macmillan, 1983.
- [10] Zheng Bojin, Wu Hongrun, Kuang Li, et al. A Simple Model Clarifies the Complicated Relationships of Complex Networks[EB/OL]. (2014-08-27). http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/bib_query?arXiv:1210.3121.
- [11] Song C, Havlin S, Makse H A. Self-similarity of Complex Networks[J]. Nature, 2005, 433(7024): 392-395.
- [12] Song Chaoming, Gallos L K, Havlin S, et al. How to Calculate the Fractal Dimension of a Complex Network: The Box Covering Algorithm[J]. Journal of Statistical Mechanics Theory and Experiment, 2007(3): 297-316.
- [13] Kim J, Goh K, Kahng B, et al. Fractality and Self-similarity in Scale-free Networks[J]. New Journal of Physics, 2007, 9(6): 177.
- [14] Zhou Weixing, Jiang Zhiqiang, Sornette D. Exploring Self-similarity of Complex Cellular Networks: The Edge-covering Method with Simulated Annealing and Log-periodic Sampling[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2007, 375(2): 741-752.
- [15] Schneider C M, Kesselring T A, Andrade J S, et al. Box-covering Algorithm for Fractal Dimension of Complex Networks[J]. Physical Review E, 2012, 86(1): 3461-3463.
- [16] Pastor-Satorras R, Vázquez A, Vespignani A. Dynamical and Correlation Properties of the Internet[J]. Physical Review Letters, 2001, 87(25).
- [17] Newman M E. Assortative Mixing in Networks[J]. Physical Review Letters, 2002, 89(20).
- [18] Kuang Li, Zheng Bojin, Li Deyi, et al. A Fractal and Scale-free Model of Complex Networks with Hub Attraction Behaviors[J]. Science China Information Sciences, 2015, 58(1): 1-10.
- [19] Shao Jia, Buldyrev S V, Cohen R, et al. Fractal Boundaries of Complex Networks[J]. Europhysics Letters, 2008, 84(4): 605-609.
- [20] Goh K I, Salvi G, Kahng B, et al. Skeleton and Fractal Scaling in Complex Networks[J]. Physical Review Letters, 2006, 96(1).

编辑 顾逸斐