·移动互联与通信技术·　　文章编号：1000-3428(2019)08-0125-04　　文献标志码：A　　中图分类号：O157.4

低维五元最优线性码的局部修复度分析

宋　倩，李瑞虎，付　强，杨瑞磻

（空军工程大学 基础部，西安 710051）

摘　要： 局部修复码应用于分布式存储系统中，其码字的任意位发生错误都可通过读取该码字其他若干位予以修复。根据该特性，围绕三维、四维最优码展开研究，通过讨论已知特殊最优码的相关参数，同时分析已知最优码生成矩阵列向量之间的线性关系，使用矩阵变换、矩阵拼接、删截等方法，构造五元域上所有的三维、四维最优码。在此基础上，分析该码尽可能小的局部修复度，并通过 C-M 界判定局部修复度的最优性，得到距离最优的局部修复度。

关键词： 最优线性码；有限域；Griesmer 界；生成矩阵；局部修复度

中文引用格式： 宋倩，李瑞虎，付强，等. 低维五元最优线性码的局部修复度分析[J]. 计算机工程，2019，45(8)：125-128.

英文引用格式： SONG Qian，LI Ruihu，FU Qiang，et al. Local repair degree analysis of low dimensional optimal linear code in 5-ary domain[J]. Computer Engineering，2019，45(8)：125-128.

Local Repair Degree Analysis of Low Dimensional Optimal Linear Code in 5-ary Domain

SONG Qian，LI Ruihu，FU Qiang，YANG Ruipan

（Department of Basic Sciences，Air Force Engineering University，Xi'an 710051，China）

【Abstract】 The local repair code is applied in distributed storage system. In this code，errors in any bit of code word can be repaired by reading other bits of the code word. According to this characteristic，the research is carried out around the three-dimensional and four-dimensional optimal codes. By discussing the relevant parameters of the known special optimal codes，analyzing the linear relationship between the column vectors of the generator matrix of the known optimal codes，and using matrix transformation，matrix concatenation，matrix subtraction and other methods，all the three-dimensional and four-dimensional optimal codes in the 5-ary domain are constructed. On this basis，the local repair degree of the code is analyzed as small as possible，and the optimal local repair degree of the code is determined by the C-M boundary，so as to obtain the local repair degree with optimal distance.

【Key words】 optimal linear code；finite field；Griesmer bound；generator matrix；local repair degree

DOI： 10.19678/j.issn.1000-3428.0051639

0　概述

编码理论是一个重要的数学分支，在大数据和云存储系统的发展中，分布式存储技术起到了重要作用，因此，应用于此的局部修复码[1]被研究者提出。局部修复码是一类特殊的纠删码，其码字的任一信息位发生错误都可通过访问其他固定数量的信息位进行恢复。如果分布式存储系统的某一节点发生损坏，则该节点存储的信息可立即通过读取其他不超过 r 个相关节点予以修复，r 即被称为码的局部修复度[2]。在现有的分布式存储系统中，评估一个编码方案性能主要可以从以下 3 个方面考量[3-4]：首先是修复过程中传输的数据量，称为修复带宽，文献[5]对其进行研究并得到一个界，将符合此界的码称作再生码；其次是单个节点修复过程中存储系统读取的数据量，称为磁盘读写量，文献[6-7]对此进行了研究；最后是修复任意节点错误所需要访问的其他节点数量，称为码的局部修复度。本文主要通过代数方法，由部分已知的最优码得到五元域上所有最优码，并在此基础上分析得到五元域上局部修复度尽可能小的码。

1　预备知识

定义 1　设 $F_5=\{0,1,2,3,4\}$，F_5^n 为 F_5 上 n 维向量空间，若 C 为 F_5 的 k 维子空间，则称 C 为 5 元码长为 n 的 k 维线性码[8]。C 中每一个向量称为 C 的一个

基金项目： 国家自然科学基金“有噪声纠缠比特的纠缠辅助量子纠错码研究”(11471011)；陕西省自然科学基金“纠缠辅助量子纠错码的构造问题研究”(2017JQ1032)。

作者简介： 宋　倩(1993—)，女，硕士研究生，主研方向为代数编码；李瑞虎，教授、博士；付　强，博士研究生；杨瑞磻，硕士。

收稿日期： 2018-05-23　　**修回日期：** 2018-08-23　**E-mail：** 352029356@qq.com

码字。若 C 中所有非零码字的最小 Hamming 重量为 d,则称 d 为 C 的最小距离,记为 $C=[n,k,d]_5$。

定义 2 对于任意线性码 $C=[n,k,d]_q$,以 C 的任意一组基为行向量构成的矩阵 $\boldsymbol{G}$,称为 C 的生成矩阵[8]。

定义 3 在线性码 $C=[n,k,d]_q$ 中,若 C 的任意码字中每一位都与其他至多 r 位线性相关,则称 C 为局部修复码,其局部修复度为 r[8]。

文献[9]指出可以通过判断一个线性码生成矩阵中列向量之间的线性相关关系来得出这个码的局部修复度。

定义 4 Cadamb-Mazumdar(C-M)界[10]

一个局部修复度为 r 的$[n,k,d]_5$ 码满足以下关系:

$$k\leqslant \min_{t\in\mathbb{Z}^+}\{tr+k_{\text{opt}}^q(n-t(r+1),d)\}$$

其中,$k_{\text{opt}}^q(n,d)$是给定码长 n、域 q 和 d 时可能达到的最大维数。更一般地,包含可用度 t 的界可参考。

引理 1 设一个长度为 n 的线性码的生成矩阵 $\boldsymbol{G}=(g_1g_2\cdots g_n)$,若对于 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$,设集合 $A_i\subseteq\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{i\}$,$g_i$ 可被至多 r 个 g_j 线性表示($j\in A_i$),则矩阵 $\boldsymbol{G}$ 生成码的局部修复度为 r[9]。

定义 5

1)下文讨论的均为五元线性码,令 $\mathbf{1}_n=(1,1,\cdots,1)_{1\times n}$,$\mathbf{0}_n=(0,0,\cdots,0)_{1\times n}$,用 $N(a,b)$ 表示集合($\{a,a+1,a+2,\cdots,b\}$)。

2)将矩阵看作其中所有列向量的集合,若 $\boldsymbol{A}$ 为一个矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 中一个列向量,则可记作 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{A}$,用 $(\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{\alpha})$表示在 $\boldsymbol{A}$ 中删除 $\boldsymbol{\alpha}$ 后剩余列向量构成的矩阵,用 $m\boldsymbol{A}$ 表示 m 个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 并置而成的新矩阵($m\in\mathbb{Z}^+$)。

设 $k\in\mathbb{Z}^+$,则 k 维首一列向量的个数为 $n_k=\dfrac{5^k-1}{4}$,显然有 $n_{k+1}=5n_k+1$。

令 $\boldsymbol{S}_2=\begin{pmatrix}101111\\011234\end{pmatrix}$,用递归的方式可得出 k 维 Simplex 码的生成矩阵 $\boldsymbol{S}_k$ 以及 k 维 MacDonald 码的生成矩阵 $\boldsymbol{M}_k$:

$$\boldsymbol{S}_k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_{k-1}&\mathbf{0}_{k-1}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{S}_{k-1}&\boldsymbol{S}_{k-1}&\boldsymbol{S}_{k-1}&\boldsymbol{S}_{k-1}\\\mathbf{0}_{n_{k-1}}&1&\mathbf{1}_{n_{k-1}}&2\cdot\mathbf{1}_{n_{k-1}}&3\cdot\mathbf{1}_{n_{k-1}}&4\cdot\mathbf{1}_{n_{k-1}}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_k=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{k-1}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{S}_{k-1}&\boldsymbol{S}_{k-1}&\boldsymbol{S}_{k-1}&\boldsymbol{S}_{k-1}\\1&\mathbf{1}_{n_{k-1}}&2\cdot\mathbf{1}_{n_{k-1}}&3\cdot\mathbf{1}_{n_{k-1}}&4\cdot\mathbf{1}_{n_{k-1}}\end{pmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{S}_k$ 与 $\boldsymbol{M}_k$ 生成 $r=2$ 的最优$[n_k,k,5^{k-1}]_5$ 码和最优$[5^{k-1},k,4\cdot5^{k-2}]_5$ 码[8]。为确定某些特殊形式最优码的局部度,给出如下引理:

引理 2 设 $\boldsymbol{G}_{k,n}$ 生成局修复部度为 r 的最优$[n,k,d]$码。若$[n+1,k,d]$码为最优,则存在局部修复度为 r 的$[n+1,k,d]$最优码[11]。

引理 3

1)设 $\boldsymbol{G}_{k,n_1}$ 生成局部修复度为 r_1 的最优$[n_1,k,d_1]$码,$\boldsymbol{G}_{k,n_2}$ 生成局部修复度为 r_2 的最优$[n_2,k,d_2]$码,则 $\boldsymbol{G}_{k,n_1+n_2}=(\boldsymbol{G}_{k,n_1}|\boldsymbol{G}_{k,n_2})$ 生成一个$[n_1+n_2,k,d_1+d_2]$码,其局部修复度 $r\leqslant\min(r_1,r_2)$。

2)设$[n,k,d]$码与$[2n,k,2d]$码均为最优,则存在局部修复度为 1 的$[2n,k,2d]$最优码[11]。

引理 4 若三维最优码的生成矩阵含有矩阵 $\boldsymbol{O}=\left(\begin{array}{c|c}0&101111\\0&011234\\1&l\cdot\mathbf{1}_6\end{array}\right)$的所有向量($l=1,2,3,4$),则此码的局部修复度为 2。

引理 5 若三维最优码生成矩阵中任一重量为 3 的向量与其相邻的某一向量的线性组合重量为 1,则此码的局部修复度为 2。

关于三维、四维五元最优码的存在性问题,文献[12-14]中已给出了构造方法并解决。但在五元最优码的研究中,局部修复度并没有得到重视,并且对于一般给定参数的$[n,k,d]_5$ 最优码,达到此参数的最优码往往有许多个且它们具有不同的 r 值。如何构造 r 值尽可能小的$[n,k,d]_5$ 最优码,目前研究较少,经过对现有文献的查阅和分析可知,其中给出的最优码的 r 值多不理想。为此,本文将从构造特殊码长的、具有较小 r 值的特殊最优码着手,采用删截、扩展、并置等组合方法,由一个码导出尽可能多的最优码,再根据周期规律和达到 Griesmer 界的码的情况,得到所有三维、四维最优码,其中特殊码长的最优生成矩阵参考 magma 数据库[15]。

2 三维最优码的局部修复度分析

当 $k=3$、$n=4$ 时,显然存在局部修复度 $r=3$ 的最优$[4,3,2]$码。因此,下文将对三维第一周期内最优线性码按照码长为 $5\leqslant n\leqslant31$、$32\leqslant n\leqslant63$、$n\geqslant93$ 3 种情况进行讨论。为简化分析过程,本文通过分析最优码生成矩阵列向量的线性相关性确定其 r 值。

2.1 $5\leqslant n\leqslant62$ 时的三维最优码及局部修复度

码长满足 $5\leqslant n\leqslant62$ 时的三维最优码及局部修复度分析如下:

1)当 $n=4,5,6,8,12,38,43,44,48,49$ 时,其最优码生成矩阵由 magma 数据库[15]给出,由 $r\leqslant k$ 可知其局部修复度为 3。

2)$\boldsymbol{G}_{3,7}=\begin{pmatrix}1001011\\0100132\\0011123\end{pmatrix}$中的列向量 $\beta_1\sim\beta_5$ 重量不超过 2,$\beta_6+\beta_7=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$,满足引理 5,所以,$\boldsymbol{G}_{3,7}$生成最优码局部修复度为 2。同理 $n\in[9,11]$,$[13,16]$时,其最优码生成矩阵由 magma 数据库[15]给出,因此 $\boldsymbol{G}_{3,n}$生成最优码的局部修复度为 2。

3)当 $n=50$ 时,$\boldsymbol{G}_{3,50}=(\boldsymbol{G}_{3,25}|\boldsymbol{G}_{3,25})$,显然其生成 $r=1$ 的最优码。

4)当 $n\in[17,30]$ 时,$\boldsymbol{G}_{3,n}$ 可由 $\boldsymbol{S}_3$ 从最后删去第 1 列~第 14 列得到。因此,$\boldsymbol{G}_{3,n}$生成最优码的局部修复度为 2。

5)当 $n\in[32,37]$,$[39,42]$,$[45,47]$或$[51,62]$时,$\boldsymbol{G}_{3,n}=(\boldsymbol{G}_{3,n-31}|\boldsymbol{S}_3)$生成的最优码的局部修复度为 2。

2.2　$63\leqslant n\leqslant 93$ 时的三维最优码及局部修复度

当 $n=62+i(i=8,13,14,18,19,20)$ 时,$\boldsymbol{G}_{3,n}=(\boldsymbol{G}_{3,n-31}\mid\boldsymbol{S}_3)$ 生成的最优码局部修复度为 2。

对于其余的 n,则 $\boldsymbol{G}_{3,n}=(\boldsymbol{G}_{n-62}\mid\boldsymbol{S}_3\mid\boldsymbol{S}_3)$,显然 $\boldsymbol{G}_{3,n}$ 生成的最优码局部修复度为 1。

2.3　$n\geqslant 94$ 时的三维最优码及局部修复度

若 $n=31t+j_1(0\leqslant j_1\leqslant 30)$,则 $t\geqslant 3$。令 $\boldsymbol{G}_{3,n}=(\boldsymbol{G}_{3,31+j}\mid\boldsymbol{G}_{3,62})$。因为 $\boldsymbol{G}_{3,62}=(\boldsymbol{S}_3\mid\boldsymbol{S}_3)$ 所生成的最优码局部修复为 1,所以 $\boldsymbol{G}_{3,n}$ 生成的最优码局部修复度为 1。

定理 1　当 $k=3$ 且 $n=31u+w$ 时,$w\in[1,31]$。

1)当 $u=0$ 且 $n=4,5,6,8,12$ 时,$\boldsymbol{G}_{3,n}$ 生成最优码的局部修复度为 3,其余的最优码局部修复度为 2。

2)当 $u=1$ 且 $n=38,43,44,48,49$ 时,$\boldsymbol{G}_{3,n}$ 生成最优码的局部修复度为 3;当 $n=50$ 时,$\boldsymbol{G}_{3,n}$ 生成最优码的局部修复度为 1,其余的最优码局部修复度为 2。

3)当 $u=2$ 且 $n=70,75,76,80,81,82$ 时,$\boldsymbol{G}_{3,n}$ 生成最优码的局部修复度为 2,其余的最优码局部修复度为 1。

4)当 $u\geqslant 3$ 时,$\boldsymbol{G}_{3,n}$ 生成最优码的局部修复度为 1。

3　四维最优码的局部修复度分析

为解决四维最优码的局部修复度确定问题,本文利用有限几何理论先构造特定码长的四维最优码,然后再按照码长 $157\leqslant n\leqslant 624$ 以及 $n\geqslant 625$ 分情况讨论四维最优码的构造和局部修复度。

3.1　$5\leqslant n\leqslant 156$ 时的四维最优码及局部修复度

码长满足 $5\leqslant n\leqslant 156$ 时的四维最优码及局部修复度分析如下:

1)当 $n\in[115,156]$ 时,分 2 种情况讨论:

(1)$\boldsymbol{G}_{4,156}=\boldsymbol{S}_4$ 和 $\boldsymbol{G}_{4,125}=\boldsymbol{S}_4\setminus\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_3\\ \boldsymbol{0}_{1\times 6}\end{pmatrix}$ 生成的最优码的局部修复度为 2,可由 $\boldsymbol{G}_{4,156}$ 和 $\boldsymbol{G}_{4,125}$ 分别删去前 1 至 10 列得 $n\in[115,124],[145,155]$ 的 $r=2$ 的最优码。

(2)构造:

$$\boldsymbol{G}_{4,138}=\boldsymbol{S}_4\setminus\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{0}_{2\times 6}\boldsymbol{S}_2\\ \boldsymbol{0}_{2\times 6} & \boldsymbol{S}_2\ \boldsymbol{S}_2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}_{4,132}=\boldsymbol{S}_4\setminus\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{0}_{2\times 6}\boldsymbol{S}_2\ \boldsymbol{S}_2\\ \boldsymbol{0}_{2\times 6} & \boldsymbol{S}_2\ \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}_{4,144}=\boldsymbol{S}_4\setminus\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{0}_{2\times 6}\\ \boldsymbol{0}_{2\times 6} & \boldsymbol{S}_2\end{pmatrix}$$

可由 $\boldsymbol{G}_{4,144}$,$\boldsymbol{G}_{4,138}$ 和 $\boldsymbol{G}_{4,132}$ 分别删去前第 1 列 ~ 第 5 列得 $n\in[126,131],[133,137],[139,143]$ 时 $r=2$ 的最优码。

2)当 $n=114,108,102,95,89,83,75,70,64,58,52,46,42,32,27,16,12$ 时,本文通过 magma 数据库[16]得到最优码生成矩阵 $\boldsymbol{G}_{4,n}$,对其进行首一化以后删列向量得到本周期内其余矩阵。

记删截 $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 的最后 1 至 p 列得到的矩阵为 $\boldsymbol{G}_{4,m}$ $(n-p\leqslant m\leqslant n-1)$,$\boldsymbol{G}_{4,m}$ 生成的最优码的 r 不变。

(1)当 $n=114,108,95,89,83,75,70,64,58,52,12$ 时,令 $p=5$,则 $\boldsymbol{G}_{4,m}$ 生成 $r=2$ 的最优码。

(2)当 $n=52,12$ 时,$p=5$,则 $\boldsymbol{G}_{4,m}$ 生成 $r=3$ 的最优码。

(3)当 $n=39,102$ 时,$p=6$,则 $\boldsymbol{G}_{4,m}$ 生成 $r=2$ 的最优码。

(4)当 $n=27$ 时,$p=10$,则 $\boldsymbol{G}_{4,m}$ 生成 $r=2$ 的最优码。

(5)当 $n=32$ 时,$p=4$,则 $\boldsymbol{G}_{4,m}$ 生成 $r=3$ 的最优码。

(6)当 $n=46$ 时,$p=3$,则 $\boldsymbol{G}_{4,m}$ 生成 $r=2$ 的最优码。

(7)当 $n=42$ 时,$p=2$,则 $\boldsymbol{G}_{4,m}$ 生成 $r=2$ 的最优码。

(8)当 $n=16$ 时,$p=3$,则 $\boldsymbol{G}_{4,m}$ 生成 $r=3$ 的最优码。

3)当 $n=5,6,77$ 时,$\boldsymbol{G}_{4,5}$、$\boldsymbol{G}_{4,6}$、$\boldsymbol{G}_{4,77}$ 如下所示。

$$\boldsymbol{G}_{4,5}=\begin{pmatrix}10001\\ 01001\\ 00101\\ 00011\end{pmatrix},\boldsymbol{G}_{4,6}=\begin{pmatrix}100011\\ 010012\\ 001021\\ 000132\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}_{4,77}=\begin{pmatrix}10001100101110011100111111101110111101101110011011111111111111111111111111111\\ 01002000010341111211002322413021400014114001114101443223144122431113441113222\\ 00100411140000100023234200143322021342313321200340433431313214131111443241112\\ 00010013001002421231430041010402314230030421441213131113324232442134431142414\end{pmatrix}$$

其中:$\boldsymbol{G}_{4,5}$、$\boldsymbol{G}_{4,6}$ 生成的最优码局部修复度为 4;$\boldsymbol{G}_{4,77}$ 生成的最优码的局部修复度为 2。

3.2　$157\leqslant n\leqslant 624$ 时的四维最优码及局部修复度

在 3.1 节的基础上,下面分 6 种类型具体给出最优码的生成矩阵并分析其局部修复度。

1)若 $n\in[159,161],[166,167],[178,181]$ 或 $[284,311]$,构造 $\boldsymbol{G}_{4,n}=(\boldsymbol{G}_{4,n-155}\mid\boldsymbol{G}_{4,155})$。$\boldsymbol{G}_{4,155}$ 含有矩阵 $\boldsymbol{O}$,根据引理 4,$\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成 $r=2$ 的最优码。

2)若 $n\in[171,177],[221,227],[316,331]$,构造 $\boldsymbol{G}_{4,n}=(\boldsymbol{G}_{4,n-150}\mid\boldsymbol{G}_{4,150})$。显然 $\boldsymbol{G}_{4,150}$ 生成最优码的 $r=2$,$\boldsymbol{G}_{4,n-150}$ 生成最优码且 $r=2$,因此 $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成 $r=2$ 的最优码。

3)若 $n=220$ 或属于以下任意一个区间:$[162,165],[183,189],[190,202],[203,219],[245,283],[312,315],[345,377],[407,432],[496,500],[515,531]$,构造 $\boldsymbol{G}_{4,n}=(\boldsymbol{G}_{4,n-125}\mid\boldsymbol{G}_{4,125})$。同理可得 $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成 $r=2$ 的最优码。

4)若 $n\in[378,406]$,构造 $\boldsymbol{G}_{4,n}=(\boldsymbol{G}_{4,n-250}\mid\boldsymbol{G}_{4,250})$。由引理 3 可得 $\boldsymbol{G}_{4,250}=(\boldsymbol{G}_{4,125}\mid\boldsymbol{G}_{4,125})$ 生成最优码且 $r=1$,因此,$\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成 $r=1$ 的最优码。

5)若 $n\in[433,468],[469,495],[501,514],[532,624]$,构造 $\boldsymbol{G}_{4,n}=(\boldsymbol{G}_{4,n-312}\mid\boldsymbol{A}_{4,312})$。$\boldsymbol{G}_{4,312}=(\boldsymbol{G}_{4,156}\mid\boldsymbol{G}_{4,156})$ 生成最优码且 $r=1$,因此 $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成 $r=1$ 的最优码。

6) 若 $n \in [239,243]$, $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 为 $\boldsymbol{G}_{4,244}$ 分别删去第 1 列~第 5 列得到。$\boldsymbol{G}_{4,244}$ 生成最优码且 $r=2$, 可得 $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成 $r=2$ 的最优码。

利用文献[12]和 Griesme 界可逐条验证上述 $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成的最优线性码。

3.3 $n \geqslant 625$ 时的四维最优码及局部修复度

$n \geqslant 625$ 时的四维最优码及局部修复度分析如下:

1) 若 $625 \leqslant n \leqslant 780$, 令 $n_1 = n - 312$, 则 $313 \leqslant n_1 \leqslant 468$, 构造 $\boldsymbol{G}_{4,n} = (\boldsymbol{G}_{4,n-312} | \boldsymbol{G}_{4,312})$。显然, $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成最优码的局部修复度为 1。

2) 若 $n \geqslant 781$, 令 $n = 156 \times t + n_2, 0 \leqslant n_2 \leqslant 155$, 则 $t \geqslant 5$。构造 $\boldsymbol{G}_{4,n} = (\boldsymbol{G}_{4,468+n_2} | \boldsymbol{G}_{4,312})$。显然, $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成最优码的局部修复度为 1。

定理 2 当 $k=4$ 时, $n = 156h + v, v \in [1,156]$。

1) 当 $h=0$ 且 $n \in [5,6]$ 时, $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成最优码的局部修复度为 3; 当 $n \in [7,12]$, $[13,16]$, $[28,32]$ 或 $[47,52]$ 时, $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成最优码的局部修复度为 3; 其余的最优码局部修复度为 2。

2) 当 $h \in [1,3]$ 且 $n \in [378,406]$, $[433,468]$, $[469,495]$, $[501,514]$, $[532,624]$ 时, $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成最优码的局部修复度为 1。其余的最优码局部修复度为 2。

3) 当 $h \geqslant 4$ 时, $\boldsymbol{G}_{4,n}$ 生成最优码的局部修复度为 1。

4 三维、四维最优码的局部修复度最优性分析

上文构造了维数 $k=3$、$k=4$ 的最优码, 且由定义 4 可以验证构造的这些码多数达到了 C-M 界。表 1 列出了未达到 C-M 界 $[n,k]_5$ 的码长 n 和维数 k。

表 1 未达到 C-M 界的 $[n,k]_5$ 码

k	n
3	12,38,43,44,48,49,70,75,76,80,81,82
4	47,48,49,50,51,52,77,159,160,161,166,167

5 结束语

本文利用部分已知五元域上三维、四维最优码的生成矩阵, 通过删截、扩展和并置等方法, 得到五元域上所有最优 $[n,3,d]_5$ 和 $[n,4,d]_5$ 码, 并分析所得生成矩阵列向量之间的线性相关关系, 构造码长 $n \geqslant 3$、局部修复度 $r \leqslant 4$ 的 $[n,3,d]_5$ 码和 $[n,4,d]_5$ 码。下一步将在所得最优码的基础上, 分析其线性自对偶性质, 在得到参数较优的 LCD 码后, 研究基于纠缠辅助的量子纠错码。

参考文献

[1] GOPALAN P, HUANG C, SIMITCI H, et al. On the locality of codeword symbols[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(11): 6925-6934.

[2] RAWAT A, PAPAILIOPOULOS D, DIMAKIS A, et al. Locality and availability in distributed storage[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(8): 4481-4493.

[3] CADAMBE V, MAZUMDAR A. An upper bound on the size of locally recoverable codes[J]. IEEE International Symposium on Network Coding, 2015, 61(11): 1-5.

[4] SILBERSTEIN N, RAWAT A, KOYLUOGLU O, et al. Optimal locally repairable codes via rank-metric codes[C]// Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory. Washington D.C., USA: IEEE Press, 2013: 1-8.

[5] TAMO I, PAPAILIOPOULOS D, DIMAKIS A. Optimal locally repairable codes and connections to matroid theory[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 62(12): 6661-6671.

[6] TAMO I, BARG A. A family of optimal locally recoverable codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 60(8): 4661-4676.

[7] PRAKASH N, KAMATH G, LALITHA V, et al. Optimal linear codes with a local-error-correction property[C]// Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory. Washington D.C., USA: IEEE Press, 2012: 2776-2780.

[8] 杨瑞磊, 李瑞虎, 郭罗斌, 等. 五维三元最优线性码的局部度[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2017, 18(4): 105-111.

[9] HUANG Pengfei, YAAKOBI E, UCHIKAWA H, et al. Binary linear locally repairable codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(11): 6268-6283.

[10] RAWAT A, PAPAILIOPOULOS D, DIMAKIS A, et al. Locality and availability in distributed storage[J]. IEEE Information Theory Society, 2016, 62(8): 4481-4493.

[11] 饶驿, 李瑞虎, 付强, 等. 短码长二元循环码的局部修复度[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2017, 18(2): 106-110.

[12] BOUKLIEV I, KAPRALOV S, MARUTA T, et al. Optimal linear codes of dimension 4 over F5[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1997, 43(1): 308-313.

[13] MARUTA T. On the nonexistence of q-ary linear codes of dimension five[J]. Designs Codes and Cryptography, 2001, 22(2): 165-177.

[14] 宋倩, 李瑞虎, 付强, 等. 五元域上 LCD 码的构造[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2018, 19(5): 100-105.

[15] CANNON J, BOSMA W. The generator matrices of optimal codes[EB/OL]. [2018-01-15]. http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/download/db/.

编辑 金胡考