



基于状态观测器的动态事件触发机制

朱明健, 樊 渊, 张成笑

(安徽大学 电气工程与自动化学院, 合肥 230601)

摘 要: 针对内部状态不可测的线性系统, 在状态观测器输出反馈的基础上, 提出一种动态事件触发机制。采用状态观测器来估计内部状态并设计事件触发机制, 利用李雅普诺夫控制理论得到使系统渐近稳定的 2 个线性矩阵不等式 (LMIs), 并在求解 LMIs 的基础上设计控制器中的参数和事件触发条件, 同时, 通过引入内部动态变量提出一种动态事件触发机制。实验结果表明, 该动态事件机制可以避免存在 Zeno 行为, 并通过仿真示例说明理论的正确性和有效性。

关键词: 线性系统; 事件触发机制; 状态观测器; 动态触发; 渐近稳定

开放科学(资源服务)标志码(OSID):



中文引用格式: 朱明健, 樊渊, 张成笑. 基于状态观测器的动态事件触发机制[J]. 计算机工程, 2020, 46(10): 301-307, 314.

英文引用格式: ZHU Mingjian, FAN Yuan, ZHANG Chengxiao. Dynamic event triggering mechanism based on state observer[J]. Computer Engineering, 2020, 46(10): 301-307, 314.

Dynamic Event Triggering Mechanism Based on State Observer

ZHU Mingjian, FAN Yuan, ZHANG Chengxiao

(School of Electrical Engineering and Automation, Anhui University, Hefei 230601, China)

[Abstract] This paper proposes a dynamic Event Triggering Mechanism (ETM) based on the output feedback of the state observer for linear systems whose internal state is unpredictable. The method uses a state observer to estimate the internal state and designs an event triggering mechanism. Then Lyapunov theory is used to obtain two Linear Matrix Inequalities (LMIs) that make the system asymptotically stable, and based on the solution to LMIs the parameters and event triggering conditions of the controller are designed. At the same time, a dynamic event triggering mechanism is proposed by introducing internal dynamic variables. Experimental results show that this dynamic event triggering mechanism can avoid the existence of Zeno behavior, and the correctness and validity of the theory are illustrated by simulation examples.

[Key words] linear system; Event Triggering Mechanism (ETM); state observer; dynamic triggering; asymptotically stable

DOI: 10.19678/j.issn.1000-3428.0055040

0 概述

在传统的时间采样控制系统中, 系统状态采样和控制器的更新通常是周期性进行的。当计算和通信资源需要分配给其任务时, 这种时间触发的方式可能使系统处于高工作负载状态。为了节省系统资源, 可以采用非周期性的触发方法。近年来, 人们越来越关注事件触发的反馈控制系统。文献[1-3]描述了关于事件触发机制的一些基本概念。事件触发机制是时间触发机制的替代方案, 在事件触发的方案中, 一旦检测到系统状态偏差不满足给定的事件

触发条件, 就会触发控制任务^[4-5]。与时间触发机制中的周期状态采样方式不同, 事件触发中的状态采样是非周期性的。因此, 设计控制器使得其仅在必要时使用计算和通信资源, 可以减少对系统资源的占用, 同时保持良好的稳定性能。研究表明, 事件触发机制相较于时间触发机制具有更优的资源节省性能。目前, 多数研究致力于开发设计事件触发机制 (ETM) 的系统技术, 用于实现给定反馈控制器的系统稳定^[6], 最常用的 ETM 通常由给定系统状态的等式或不等式组成。事件触发机制多采用文献[7-8]中的多智能体系统, 也常见于多智能体系统

基金项目: 国家自然科学基金 (61573021)。

作者简介: 朱明健 (1997—), 男, 硕士研究生, 主研方向为事件触发控制、优化控制; 樊 渊 (通信作者), 教授; 张成笑, 硕士研究生。

收稿日期: 2019-05-27 **修回日期:** 2019-09-03 **E-mail:** yuanf3@foxmail.com

的自触发方案设计^[9-10]。

文献[11]研究了基于观测器的事件触发控制的闭环系统。类似于事件触发的输出反馈控制系统的情况^[12],该系统的输出仅在满足事件触发条件时传输给观测器。通过满足给定的线性矩阵不等式(LMIs)条件和事件触发条件,可以使反馈控制系统和观测器系统是渐近稳定的。文献[13-14]研究了在某些不确定系统中基于观测器的事件触发状态反馈机制,通过求解 LMIs 可以证明系统的稳定性。

通过在事件触发机制中引入一个内部动态变量,可以得到动态 ETM。已有研究学者对 ETM 中的内部动态变量进行了研究^[15-17]。文献[18-19]中的动态触发机制也引入了内部动态变量,且提出的机制已经获得了相应的理论成果。与 ETM 相比,动态 ETM 可以降低收敛速度和触发次数,从而改进 ETM 的性能。事实证明,对于大部分事件触发控制器而言,动态 ETM 的最小触发间隔大于 ETM^[20]。

对于多数事件触发机制研究来说,系统状态都是已知的。本文针对状态不可测线性系统,提出一种基于状态观测器输出反馈的动态 ETM,状态观测器利用输出的事件触发信号来估计系统状态。事件触发的控制系统可能会存在 Zeno 行为,Zeno 行为意味着在有限的时间段内存在无数次的触发,这对于实际物理系统是不允许的。因此,在实验中给出事件触发控制的最小触发时间间隔,以排除 Zeno 行为。

1 基础知识

函数 $\beta: \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ 是连续的严格递增的函数且 $\beta(0)=0$,则称之为 K 函数。若存在 $r \rightarrow +\infty$ 时, $\beta(r) \rightarrow +\infty$,则将 β 称为 K_∞ 函数。其中, \mathbf{R}_0^+ 表示非负实数集合。

函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 使得对于任意的 $x, y \in Q \subset \mathbf{R}^n$, 存在一个常数矩阵 $M > 0$ 且满足式(1)时,则称该函数是 Lipschitz 连续的。

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\| \quad (1)$$

其中, \mathbf{R}^n 表示 n 维欧氏空间, $\mathbf{R}^{m \times n}$ 表示所有的 $m \times n$ 维实矩阵的集合。

引理 1^[21] 若 X 和 Y 是实正定矩阵,则以下不等式成立:

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T X + Y^T Y \quad (2)$$

引理 2^[22] 对于一个对称矩阵 $S \in \mathbf{R}^{n \times n}$,存在 $S =$

$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$, 其中, $S_{11} \in \mathbf{R}^{r \times r}$, $S_{12} \in \mathbf{R}^{r \times (n-r)}$, $S_{21} \in \mathbf{R}^{(n-r) \times r}$, $S_{22} \in \mathbf{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ 。当 $S_{11} < 0$, $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$ 或者 $S_{22} < 0$, $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ 时,存在 $S < 0$ 。

2 基于观测器事件触发机制

系统状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3)$$

其中, $x \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态向量,初始状态定义为 $x(0) = x_0$, $u \in \mathbf{R}^m$ 为系统的输入向量, $y \in \mathbf{R}^q$ 为输出向量。 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 和 $C \in \mathbf{R}^{q \times n}$ 均为已知常数矩阵。全维状态观测器为:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ 是观测器状态向量, $\hat{y} \in \mathbf{R}^q$ 是观测器输出向量, $L \in \mathbf{R}^{n \times q}$ 是观测器增益矩阵。假设 $\{A, B\}$ 是完全可控的以及 $\{A, C\}$ 是完全可观的。

基于观测器的反馈控制器 $u(t) = K\hat{x}(t)$, K 是反馈增益矩阵。定义观测器状态误差为 $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$,可以得到观测误差的动态方程为 $\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}(t)$ 。

2.1 事件触发机制

实验将引入事件触发机制改善系统的性能。假设系统式(3)的输出信号仅在 $t_k, k \in \mathbf{Z}_0^+$ 时刻更新,输出信号即可表示为: $y(t) = y(t_k), t \in [t_k, t_{k+1})$,重新得到观测器的表达式为: $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bx(t) + L(y(t_k) - \hat{y}(t))$ 。

定义输出误差为:

$$e_y(t) = y(t_k) - y(t), t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (5)$$

因此,可以描述系统状态和观测器状态误差为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) - B\tilde{K}\tilde{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) - Le_y(t) \end{cases} \quad (6)$$

事件触发机制系统结构如图 1 所示。

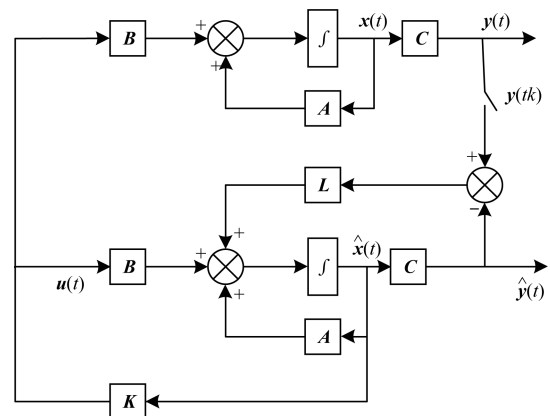


图 1 基于观测器的事件触发机制系统结构

Fig.1 Event triggering mechanism system structure based on observer

定义事件触发条件为:

$$\mathbf{e}_y^T(t) \mathbf{e}_y(t) < \sigma \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t), \sigma \in [0, 1) \quad (7)$$

其中, σ 为给定的常数。当不满足式(7)时, 对系统输出信号进行更新。

定理 1 在系统式(6)中, 如果存在 2 个正定矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 以及正数 $\sigma \in [0, 1)$ 满足以下 2 个矩阵不等式(8)与式(9):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P}_1 + \sigma \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{P}_1 \mathbf{BK} \\ \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}_1 & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_2(\mathbf{A} - \mathbf{LC}) + (\mathbf{A} - \mathbf{LC})^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{I}_n & \mathbf{P}_2 \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T \mathbf{P}_2 & -\mathbf{I}_q \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

则系统式(6)是渐近稳定的, 且有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) = 0.$$

证明 构造 Lyapunov 函数为:

$$V(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_1 \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

其中, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ 分别为矩阵不等式(8)和式(9)的解, 对 Lyapunov 函数关于时间求导可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + \\ &\quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(t) \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P}_2 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \\ &\quad ((\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{x}}(t))^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}(t) + \\ &\quad \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_1 ((\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{x}}(t)) + \\ &\quad ((\mathbf{A} - \mathbf{LC})\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{e}_y(t))^T \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{x}}(t) + \\ &\quad \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P}_2 ((\mathbf{A} - \mathbf{LC})\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{e}_y(t)) = \\ &\quad \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{P}_1(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P}_1) \mathbf{x}(t) + \\ &\quad \tilde{\mathbf{x}}^T(t) (\mathbf{P}_2(\mathbf{A} - \mathbf{LC}) + (\mathbf{A} - \mathbf{LC})^T \mathbf{P}_2) \tilde{\mathbf{x}}(t) - \\ &\quad 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_1 \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{x}}(t) - 2\tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P}_2 \mathbf{L}\mathbf{e}_y(t) \leq \\ &\quad \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{P}_1(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P}_1) \mathbf{x}(t) + \\ &\quad \tilde{\mathbf{x}}^T(t) (\mathbf{P}_2(\mathbf{A} - \mathbf{LC}) + (\mathbf{A} - \mathbf{LC})^T \mathbf{P}_2) \tilde{\mathbf{x}}(t) + \\ &\quad \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_1 \mathbf{BKK}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \tilde{\mathbf{x}}(t) + \\ &\quad \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P}_2 \mathbf{LL}^T \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{e}_y^T(t) \mathbf{e}_y(t) \quad (10) \end{aligned}$$

由事件触发机制可知, 若式(7)不满足, 则会有第 $k+1$ 次更新执行。因此, 通过计算可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{P}_1(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P}_1 + \\ &\quad \mathbf{P}_1 \mathbf{BKK}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}_1 + \sigma \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \mathbf{x}(t) + \\ &\quad \tilde{\mathbf{x}}^T(t) (\mathbf{P}_2(\mathbf{A} - \mathbf{LC}) + (\mathbf{A} - \mathbf{LC})^T \mathbf{P}_2 + \\ &\quad \mathbf{P}_2 \mathbf{LL}^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (11) \end{aligned}$$

由引理 1 可知, 不等式(8)、不等式(9)分别与以下不等式(12)、不等式(13)等价:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_1(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P}_1 + \\ &\mathbf{P}_1 \mathbf{BKK}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}_1 + \sigma \mathbf{C}^T \mathbf{C} < 0 \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_2(\mathbf{A} - \mathbf{LC}) + (\mathbf{A} - \mathbf{LC})^T \mathbf{P}_2 + \\ &\mathbf{P}_2 \mathbf{LL}^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{I} < 0 \quad (13) \end{aligned}$$

因此, 可以证明 $\dot{V}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) < 0$, 即系统式(6)是渐近稳定的。

备注 1 通过求解线性矩阵不等式(8)和不等式(9), 可以得到参数 σ 以及 \mathbf{P}_1 和 \mathbf{P}_2 的值。这些参数值在事件触发条件式(7)下可以保证系统状态和观测器误差状态的渐近稳定性。此外, 这 2 个线性矩阵不等式互相独立。事件触发策略的设计仅仅与控制器增益矩阵 \mathbf{K} 有关, 而与观测器本身无关, 这显示了事件触发方案的设计与观测器之间的分离原则。

令 2 个对称正定矩阵 $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 满足以下等式:

$$\mathbf{M} = -(\mathbf{P}_1(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{BKK}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}_1) \quad (14)$$

$$\mathbf{N} = -(\mathbf{P}_2(\mathbf{A} - \mathbf{LC}) + (\mathbf{A} - \mathbf{LC})^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{LL}^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{I}) \quad (15)$$

可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{P}_1(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P}_1 + \\ &\quad \mathbf{P}_1 \mathbf{BKK}^T \mathbf{P}_1) \mathbf{x}(t) + \mathbf{e}_y^T(t) \mathbf{e}_y(t) + \\ &\quad \tilde{\mathbf{x}}^T(t) (\mathbf{P}_2(\mathbf{A} - \mathbf{LC}) + (\mathbf{A} - \mathbf{LC})^T \mathbf{P}_2 + \\ &\quad \mathbf{P}_2 \mathbf{LL}^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{x}}(t) = \\ &\quad -\mathbf{x}^T(t) \mathbf{M} \mathbf{x}(t) + \mathbf{e}_y^T(t) \mathbf{e}_y(t) - \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{N} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \\ &\quad \mathbf{x}^T(t) (\sigma \mathbf{C}^T \mathbf{C} - \mathbf{M}) \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{N} \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (16) \end{aligned}$$

事件触发时刻有以下不等式 $\mathbf{e}_y^T(t) \mathbf{e}_y(t) \geq \sigma \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t)$, 则 ETM 的时间序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0^+}$ 可以定义为:

$$t_{k+1} = \arg \min_{t > t_k} \left\{ t \mid \sigma \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) - \mathbf{e}_y^T(t) \mathbf{e}_y(t) \leq 0 \right\} \quad (17)$$

该事件触发机制意味着 $\sigma \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) - \mathbf{e}_y^T(t) \mathbf{e}_y(t)$ 的值始终是非负的, 因此有 $\frac{dV(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t))}{dt} < 0$, 保证了 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时渐近收敛。

事件触发策略式(17)仅受 $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_y$ 当前值的影响。下文中提出了动态 ETM, 引用一个额外的内部动态变量。动态 ETM 不仅与当前时刻状态有关, 而且还受之前状态的影响。

2.2 动态事件触发机制

通过使用动态 ETM, 系统可以进一步减少触发次数, 从而可以实现更好的资源节省性能。基于满足以下微分方程的内部动态变量 η 引入动态 ETM:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= -\beta(\eta(t)) + \sigma \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) - \mathbf{e}_y^T(t) \mathbf{e}_y(t) \\ \eta(0) &= \eta_0 \quad (18) \end{aligned}$$

其中, β 是 K_∞ 类函数, 并且满足 Lipschitz 连续性。 $\sigma > 0$ 和 $\eta_0 \in \mathbf{R}_0^+$ 是已知参数。根据 β 可以是线性或非线性的, 系统式(3)可以保持稳定, 并且不需要必须保持 $\sigma \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_y$ 非负。这可以通过事件触发这样的方式来确保, 即 η 始终保持非负值。则动态 ETM 由以下规则定义:

$$t_{k+1} = \operatorname{argmin}_{t > t_k} \left\{ t \mid \eta(t) + \theta [\sigma y^T(t) y(t) - e_y^T(t^-) e_y(t^-)] \leq 0 \right\} \quad (19)$$

其中, $\theta \in \mathbf{R}_0^+$ 是一个额外设计的参数, 其中事件触发机制式(17)可以视为动态事件触发机制在 $\theta \rightarrow +\infty$ 时的特殊情况。

引理 3 假设 β 是 K_∞ 函数且满足 Lipschitz 连续性, 令 $\sigma \in [0, 1]$, $\eta, \theta \in \mathbf{R}_0^+$ 。假设 x, e_y 和 η 分别由式(3)、式(5)、式(18)定义, 那么对任意的 $t \in [0, \infty)$ 时, 存在:

$$\eta(t) + \theta(\sigma y^T(t) y(t) - e_y^T(t) e_y(t)) \geq 0 \quad (20)$$

$$\eta(t) \geq 0 \quad (21)$$

证明 动态触发条件式(19)确保了对任意的 $t \in [0, \infty)$ 均有: $\eta(t) + \theta(\sigma y^T(t) y(t) - e_y^T(t^-) e_y(t^-)) \geq 0$ 。

由于 $e_y(t)$ 是连续的且对任意的 $t \in [0, \infty)$ 都满足 $e_y^T(t) e_y(t) \leq e_y^T(t^-) e_y(t^-)$, 因此不等式(20)得证。如果 $\theta = 0$, 不等式(21)则是不等式(20)的一个特例, 因此存在 $\eta(t) \geq 0$ 。若 $\theta \neq 0$, 通过不等式(20)可以得到:

$$\sigma y^T(t) y(t) - e_y^T(t) e_y(t) \geq -\frac{1}{\theta} \eta(t) \quad (22)$$

通过式(18)可以得到:

$$\dot{\eta}(t) \geq -\beta(\eta(t)) - \frac{1}{\theta} \eta(t), \eta(0) \geq 0 \quad (23)$$

通过比较和分析可知, 对任意的 $t \in [0, \infty)$ 都满足 $\eta(t) \geq 0$, 因此, η 在任意时刻都保证是非负的。

定理 2 对任意的 $\sigma \in [0, 1]$, $\eta, \theta \in \mathbf{R}_0^+$, 在动态事件触发条件式(19)下, $x(t), \tilde{x}(t)$ 和 $\eta(t)$ 渐近收敛。

证明 定义 Lyapunov 函数 $W: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ 来证明系统的稳定性, 令:

$$W(x, \tilde{x}, \eta) = V(x, \tilde{x}) + \eta \quad (24)$$

显然, W 是正的并且径向无界, 且对任意的 $(x, \tilde{x}, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_0^+$ 均有 $W(x, \tilde{x}, \eta) > V(x, \tilde{x})$ 成立。同样, 根据不等式(16)与不等式(18), $W(x, \tilde{x}, \eta)$ 关于时间的导数满足:

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{V}(x(t), \tilde{x}(t)) + \dot{\eta}(t) \leq \\ &= -x^T(t) M x(t) + e_y^T(t) e_y(t) - \\ &= \tilde{x}^T(t) N \tilde{x}(t) + \dot{\eta}(t) = \\ &= -x^T(t) M x(t) - \tilde{x}^T(t) N \tilde{x}(t) + \\ &= \sigma y^T(t) y(t) - \beta(\eta(t)) = \\ &= x^T(t) (\sigma C^T C - M) x(t) - \\ &= \tilde{x}^T(t) N \tilde{x}(t) - \beta(\eta(t)) \end{aligned} \quad (25)$$

由于 β 是 K_∞ 函数且满足 Lipschitz 连续性, 同时有 $\sigma > 0$, $\frac{dW(x, \tilde{x}, \eta)}{dt} \leq 0$ 。

W 是衰减的, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x(t), \tilde{x}(t)$ 和 $\eta(t)$ 渐近收敛于原点。

备注 2 提出的动态 ETM 有几个设计参数, $\eta, \sigma \in (0, 1)$ 以及 $\theta \in \mathbf{R}_0^+$ 。这些参数主要影响触发间隔的下界和系统状态的收敛速度, 实验需要提供一些论证来指导选择参数值。首先, 触发间隔的下界是 θ 的连续函数。实际上, ETM 可以被视为动态 ETM 的极限情况, 其中 $\theta \rightarrow +\infty$ 。其次, 闭环系统式(6)的收敛与 σ 直接相关, 通过适当选择参数 σ 可以调节衰减率, 也可以通过改变 σ 值来控制事件触发的次数。通过调整 σ 和 θ , 可以接近理想闭环系统式(6)的性能。最后, 尽量选择合适的 σ 和 θ , 以减少对性能指标的影响。

2.3 Zeno 行为分析

事件触发机制中的一个重要问题为是否存在最小的触发间隔 $\tau > 0$, 对任意的时间序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbf{Z}_0^+}$ 都满足 $t_{k+1} - t_k \geq \tau, \forall k \in \mathbf{Z}_0^+$ 。下文将提出一种动态触发机制的方法来排除 Zeno 行为。

事件触发条件式(7)等价于 $\|e_y(t)\| < \sqrt{\sigma} \|y(t)\|$, 由于 $y = Cx$, 因此有 $\|e_y(t)\| < \sqrt{\sigma} \|C\| \|x(t)\|$, 同时 $\|e_y(t)\| < \sqrt{\sigma} \|C\| \|\tilde{x}(t) + \hat{x}(t)\|$, 则不等式成立:

$$\|e_y(t)\| < \sqrt{\sigma} \|C\| (\|\tilde{x}(t)\| + \|\hat{x}(t)\|) \quad (26)$$

令:

$$\|e_y(t)\| < \sqrt{\sigma} \|C\| \|\tilde{x}(t)\| \quad (27)$$

若不等式(27)成立, 则一定存在不等式(7)成立, 同样能保证系统式(3)的渐近稳定性。因此, 有 $\|\tilde{x}(t)\| > \frac{1}{\sqrt{\sigma} \|C\|} \|e_y(t)\|$, 由于 $\sigma \in (0, 1)$, 可以得到 $\|\tilde{x}(t)\| > \frac{1}{\|C\|} \|e_y(t)\|$ 或者可以得到 $-\|\tilde{x}(t)\| < -\frac{1}{\|C\|} \|e_y(t)\|$, 则可将系统的状态空间描述为:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) - B\tilde{K}\tilde{x}(t) \leq \\ &= (A + BK)x(t) - \frac{BK}{\|C\|} \|e_y(t)\| \leq \\ &= (A + BK)x(t) + \frac{BK}{\|C\|} \|e_y(t)\| \end{aligned} \quad (28)$$

推论 1 对于闭环系统式(3)以及控制律 $u = K\hat{x}$, 在事件触发条件式(7)下任意的时间序列 $\{t_{k+1} - t_k\}$, 都存在一个正的最小的时间下界 τ :

$$\tau = \frac{1}{p-q} \ln \frac{p\sqrt{\sigma}+q}{q\sqrt{\sigma}+q} \quad (29)$$

其中, $q = \|A\| + \|BK\|$, $p = \|BK\|$ 。

证明 利用式(28)的结论, 可以通过以下变量的导数得到触发间隔下限:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\|e_y(t)\|}{\|y(t)\|} &= \frac{e_y^T(t) \dot{e}_y(t)}{\|e_y(t)\| \|y(t)\|} - \frac{y^T(t) \dot{y}(t) \|e_y(t)\|}{\|y(t)\|^2 \|y(t)\|} \leq \\ &= \frac{\|e_y^T(t)\| \|\dot{y}(t)\|}{\|e_y(t)\| \|y(t)\|} + \frac{\|\dot{y}(t)\| \|e_y(t)\|}{\|y(t)\|^2} = \\ &= \left(1 + \frac{\|e_y(t)\|}{\|y(t)\|}\right) \frac{\|\dot{y}(t)\|}{\|y(t)\|} = \\ &= \left(1 + \frac{\|e_y(t)\|}{\|y(t)\|}\right) \frac{\|C\dot{x}(t)\|}{\|y(t)\|} \leq \\ &= \left(1 + \frac{\|e_y(t)\|}{\|y(t)\|}\right) \frac{q\|y(t)\| + p\|e_y(t)\|}{\|y(t)\|} \leq \\ &= \left(1 + \frac{\|e_y(t)\|}{\|y(t)\|}\right) (q + p \frac{\|e_y(t)\|}{\|y(t)\|}) \quad (30) \end{aligned}$$

令 $\phi = \frac{\|e_y(t)\|}{\|y(t)\|}$, 可以简化式(30)为:

$$\dot{\phi} \leq (1 + \phi)(q + p\phi) \quad (31)$$

令初始条件为 $\phi(0) = 0$, 通过求解式(31)可以得到:

$$\phi(t) = \frac{q - qe^{-(p-q)t}}{qe^{-(p-q)t} - p} \quad (32)$$

其中, $q = \|A\| + \|BK\|$, $p = \|BK\|$ 。根据式(10)可知:

$$\phi(\tau) = \sqrt{\sigma}, \phi(0) = 0$$

因此, 可以得到事件触发最小时间下界 τ 为:

$$\tau = \frac{1}{p-q} \ln \frac{p\sqrt{\sigma}+q}{q\sqrt{\sigma}+q} \quad (33)$$

其中, $q = \|A\| + \|BK\|$, $p = \|BK\|$ 均大于 0, 且 $q > p$, 则存在:

$$\frac{p\sqrt{\sigma}+q}{q\sqrt{\sigma}+q} < 1 \quad (34)$$

$$\ln \frac{p\sqrt{\sigma}+q}{q\sqrt{\sigma}+q} < 0 \quad (35)$$

因此 $\tau > 0$ 。事件触发机制不存在 Zeno 行为。

推论表明, 对于系统给定的状态, 动态 ETM 给出的下一个执行时间大于 ETM 给出的时间。

推论 2 对于给定的 β 为 Lipschitz 连续的 K_∞ 函数, $\sigma > 0$, $\eta_0, \theta \in \mathbf{R}_0^+$, 令 $k \in \mathbf{Z}_0^+$, $t_k \in \mathbf{R}_0^+$, $x(t_k) \in \mathbf{R}^n$ 和 $\eta(t_k) \geq 0$ 。令 t_{k+1}^s 为事件触发时刻, t_{k+1}^d 为动态事件触发时刻, 那么有 $t_{k+1}^s \leq t_{k+1}^d$ 。

证明 假设 $t_{k+1}^s > t_{k+1}^d$, 通过式(17)可以得到:

$$\sigma \|y(t_{k+1}^d)\| - \|e_y(t_{k+1}^d)\|^2 > 0 \quad (36)$$

当 $\theta > 0$ 时, 由式(19)和引理 3 可以得到:

$$0 \geq \eta(t_{k+1}^d) + \theta(\sigma \|y(t_{k+1}^d)\|^2 - \|e_y(t_{k+1}^d)\|^2) \geq \theta(\sigma \|y(t_{k+1}^d)\| - \|e_y(t_{k+1}^d)\|) \quad (37)$$

这与式(36)互相矛盾, 因此 $t_{k+1}^s \leq t_{k+1}^d$ 。

如果 $\theta = 0$, 那么由事件触发条件式(19)可知 $\eta(t_{k+1}^d) = 0$ 且 $\dot{\eta}(t_{k+1}^d) \leq 0$, 通过式(18)又得到 $0 \geq \dot{\eta}(t_{k+1}^d) = \sigma \|y(t_{k+1}^d)\| - \|e_y(t_{k+1}^d)\|^2$ 。这同样与式(36)互相矛盾, 因此 $t_{k+1}^s \leq t_{k+1}^d$ 。可以得出结论, 动态 ETM 式(19)的最小触发间隔不会小于 ETM 式(17)的执行时间。类似的, 可以选取较小的参数 θ 得到一个较大的最小触发间隔时间, 同时意味着动态触发的闭环系统不会存在 Zeno 行为。

3 模拟仿真

使用一个例子来验证理论结果的有效性。考虑形式为式(3)的线性系统为:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.8 & 0.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C &= [-0.65 \quad 6.85], x_0 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

系统很明显是完全可控可观的。

反馈增益由极点配置设计, 极点选取为 $\{-0.2, -0.7\}$, 可以得到 $K = [-0.1 \quad -0.34]$, 而观测器的增益是将观测器系统的极点置于 $\{-3, -4\}$, 可以得到 $L = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, L 作为观测器的输出误差反馈矩阵,

使得 \hat{x} 可以渐近收敛到 x 。

通过求解触发条件式(7)可以得到矩阵 P_1 的值以及 $\sigma = 0.0031$, 事件触发条件就为 $e_y^T(t) e_y(t) < 0.0031 y^T(t) y(t)$, 且 $P_1 = \begin{bmatrix} 7.5306 & 0.9465 \\ 0.9465 & 1.0783 \end{bmatrix}$ 。

求解 LMI 式(8)可以得到矩阵 P_2 值为 $P_2 = \begin{bmatrix} 1.0422 & -0.7703 \\ -0.7703 & 0.9565 \end{bmatrix}$ 。

实验选取 $\beta(\eta) = \lambda\eta$ 是满足 Lipschitz 连续的 K_∞ 函数。关于 λ 和 θ 的参数, 为了显示更好的效果, 参数选取为 $\lambda = 0.01$, $\sigma = 0.0031$ 和 $\theta = 1$ 。这些参数选取符合具有动态触发机制的事件触发机制要求。

图 2 显示了 ETM 的误差范数, 误差范数一旦达到阈值, 它就会重置为 0。图 3 显示了动态 ETM 的误差范数, 当误差范数达到阈值时, 它也会重置为 0。

从图中可以看出,动态 ETM 可容许较大的误差范数阈值,这是由事件触发条件决定的。ETM 的触发次数为 201,动态 ETM 的触发次数为 30,与 ETM 相比,动态 ETM 减少了触发次数。

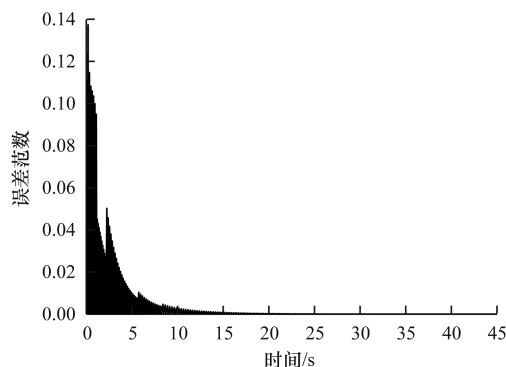


图 2 ETM 误差范数

Fig. 2 ETM error norm

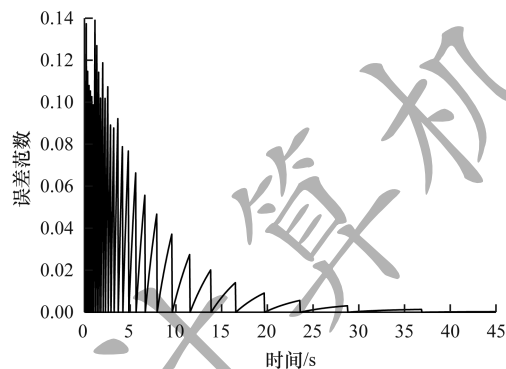


图 3 动态 ETM 误差范数

Fig. 3 Dynamic ETM error norm

基于观测器 ETM 的平均触发时间间隔如图 4 所示,触发时间间隔的平均值为 0.224 s。图 5 所示为基于观测器的动态 ETM 事件触发机制的平均触发时间间隔,平均触发时间间隔为 1.500 s。ETM 的触发时间间隔的平均值远小于动态 ETM 的平均触发时间间隔。

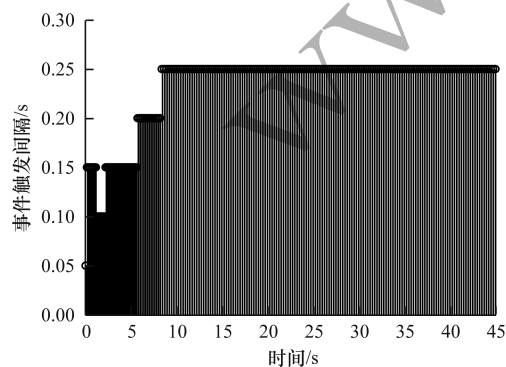


图 4 ETM 触发时间间隔

Fig. 4 ETM trigger the interval

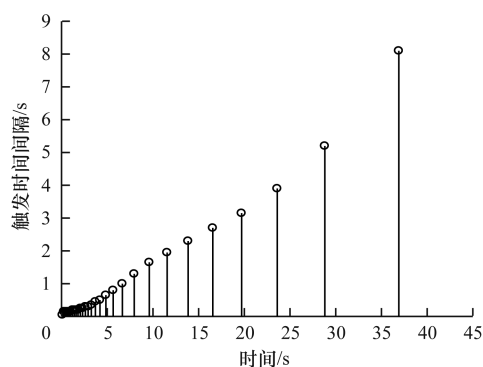


图 5 动态 ETM 触发时间间隔

Fig. 5 Dynamic ETM trigger time interval

图 6、图 7 和图 8 中的状态轨迹展示了基于观测器的动态 ETM 事件触发机制系统的渐近稳定性。图 6 显示了系统的状态轨迹,从图 6 可以看出,系统的状态由初始值 $[-0.2, 0.4]$ 逐渐趋于原点,系统是渐近稳定的。图 7 显示了观测器的状态轨迹,从图 7 可以看出,观测器的状态由初始值 $[0, 0]$ 逐渐逼近系统实际状态,且最终趋于稳定。图 8 显示了观测器误差的状态轨迹,在初始时刻,针对状态不可测现象,令观测器状态和系统实际状态初始值不同,因此观测器误差较大,随着系统的运行,误差可以迅速减小并趋于 0。

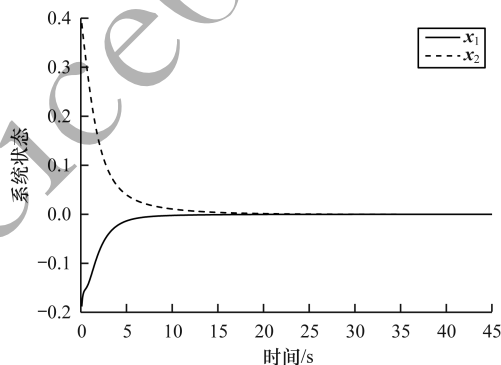


图 6 动态 ETM 系统状态轨迹

Fig. 6 Dynamic ETM system state trajectory

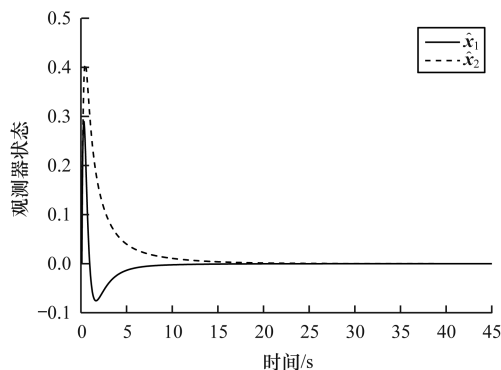


图 7 动态 ETM 观测器状态轨迹

Fig. 7 Dynamic ETM observer state trajectory

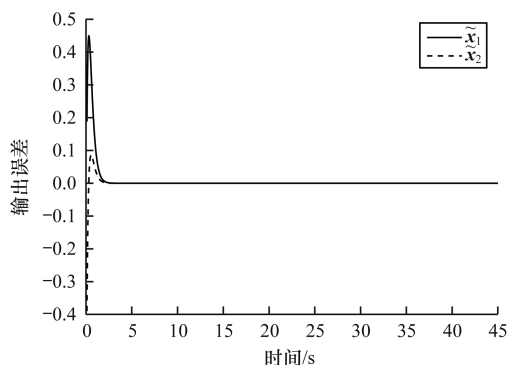


图8 动态 ETM 观测器状态误差轨迹

Fig.8 Dynamic ETM observer state error trajectory

4 结束语

本文提出一种基于观测器的动态事件触发机制,根据2个LMIs建立系统渐近稳定的条件。通过引入额外的内部动态变量,事件触发条件会更加多样化,从而减少事件触发次数。本文给出了Zeno行为不存在的证明过程,并通过仿真实例论证结果,这些实例可应用于线性时不变系统。下一步可以考虑改善事件触发条件和加入优化控制,以期达到优化系统性能指标的目的。

参考文献

- [1] HEEMELS W P M H, JOHANSSON K H, TABUADA P. An introduction to event-triggered and self-triggered control[C]//Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control. Washington D. C., USA: IEEE Press, 2012: 3270-3285.
- [2] YANG Feisheng, WANG Jing, PAN Quan. A survey of networked event-triggered control[J]. Control and Decision, 2018, 33(6): 969-977. (in Chinese)
杨飞生, 汪璟, 潘泉. 基于事件触发机制的网络控制研究综述[J]. 控制与决策, 2018, 33(6): 969-977.
- [3] LI Lili, SONG Linyang, GUO Jiajun, et al. Event-triggered output regulation for a class of switched linear systems[J]. Information and Control, 2019, 48(2): 245-250. (in Chinese)
李莉莉, 宋林阳, 郭家珺, 等. 一类线性切换系统的事件触发输出调节问题[J]. 信息与控制, 2019, 48(2): 245-250.
- [4] VELASCO M, MARTI P, BINI E. Control-driven tasks: modeling and analysis[C]//Proceedings of 2008 Real-Time Systems Symposium. Washington D. C., USA: IEEE Press, 2008: 280-290.
- [5] HUANG Hongwei, HUANG Tianmin, WU Sheng. Event-triggered consensus control of second-order multi-agent systems[J]. Application Research of Computers, 2017, 34(1): 27-30. (in Chinese)
黄红伟, 黄天民, 吴胜. 基于事件触发控制的二阶多智能体的一致性[J]. 计算机应用研究, 2017, 34(1): 27-30.
- [6] TABUADA P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(9): 1680-1685.
- [7] FAN Yuan, ZHANG Chengxiao, SONG Cheng. Sampling-based self-triggered coordination control for multi-agent systems with application to distributed generators[J]. International Journal of Systems Science, 2018, 49(15): 3048-3062.
- [8] ZHANG Jie, TIAN Yuan. Consensus analysis of directed multi-agent networks under distributed event-triggered control[J]. Computer Engineering, 2017, 43(8): 288-292, 298. (in Chinese)
张捷, 田袁. 分布式事件触发控制下的有向多智能体网络一致性分析[J]. 计算机工程, 2017, 43(8): 288-292, 298.
- [9] FAN Yuan, LIU Lu, FENG Gang, et al. Self-triggered consensus for multi-agent systems with zeno-free triggers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(10): 2779-2784.
- [10] WANG X F, LEMMON M D. Self-triggered feedback control systems with finite-gain L_2 stability[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(3): 452-467.
- [11] LI Bing, WANG Zidong, MA Lifeng, et al. Observer-based event-triggered control for nonlinear systems with mixed delays and disturbances: the input-to-state stability[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(7): 2806-2819.
- [12] CHEN Xia, HAO Fei. Stability of event-triggered output-feedback control system[C]//Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. Washington D. C., USA: IEEE Press, 2011: 1184-1189.
- [13] CHEN Xia, HAO Fei. Observer-based event-triggered control for certain and uncertain linear systems[J]. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2013, 30(4): 527-542.
- [14] DONG Chuanbao, FAN Yuan, SONG Cheng. Observer-based output-feedback control for uncertain linear systems with event-triggered[C]//Proceedings of 2018 Chinese Control and Decision Conference. Washington D. C., USA: IEEE Press, 2018: 1948-1947.
- [15] MAZO M J, ANTA A, TABUADA P. An ISS self-triggered implementation of linear controllers[J]. Automatica, 2010, 46(8): 1310-1314.
- [16] SEURET A, PRIEUR C. Event-triggered sampling algorithms based on a Lyapunov function[C]//Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Washington D. C., USA: IEEE Press, 2011: 6128-6133.
- [17] WANG X F, LEMMON M D. Event design in event-triggered feedback control systems[C]//Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Washington D. C., USA: IEEE Press, 2008: 2105-2110.
- [18] YANG Yong, ZHANG Chengxiao, WANG Lun, et al. Distributed event-triggered control with dynamic triggering mechanisms for multi-agent systems[C]//Proceedings of the 29th Chinese Control and Decision Conference. Washington D. C., USA: IEEE Press, 2017: 2508-2512.

~~~~~  
(上接第 307 页)

- [19] WANG Shi, ZHANG Peng, FAN Yuan. Centralized event-triggered control of multi-agent systems with dynamic triggering mechanisms[C]//Proceedings of the 27th Chinese Control and Decision Conference. Washington D. C. ,USA;IEEE Press,2015;2183-2187.
- [20] GIRARD A. Dynamic triggering mechanisms for event-triggered control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2015,60(7);1992-1997.
- [21] BOYD S, EL G L, FERON E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. [S. l]: Society for Industrial and Applied Mathematics,1994.
- [22] YU Li. Robust control-the method to solve linear matrix inequality[M]. Beijing:Tsinghua University Press,2002. (in Chinese)  
俞立.鲁棒控制:线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京:清华大学出版社,2002.

编辑 刘继娟