

基于最优传输的网格参数化序列簇生成方法

夏诗羽, 苏科华, 陈彩玲

(武汉大学 计算机学院, 武汉 430072)

摘要: 利用 Ricci 曲率流将原表面上的面元测度前推到目标参数域上形成初始面元测度, 对初始面元测度或目标面元测度进行变换, 以构造一系列连续变换的面元测度序列, 然后计算面元测度间的最优传输映射并构建连续变换的参数化序列簇。通过莫比乌斯变换、曲率强化和重要性驱动 3 种方式对面元测度进行变换实验, 结果表明, 相比拟等积方法, 该方法可以构造出多种不同的参数化序列簇, 并能取得较好的特殊参数化效果。

关键词: 参数化序列簇; 最优传输映射; Ricci 曲率流; 测度控制; 莫比乌斯变换

中文引用格式: 夏诗羽, 苏科华, 陈彩玲. 基于最优传输的网格参数化序列簇生成方法[J]. 计算机工程, 2019, 45(1):264-269, 277.

英文引用格式: XIA Shiyu, SU Kehua, CHEN Cailing. Grid parameterized sequence clusters generation method based on optimal transmission[J]. Computer Engineering, 2019, 45(1):264-269, 277.

Grid Parameterized Sequence Clusters Generation Method Based on Optimal Transmission

XIA Shiyu, SU Kehua, CHEN Cailing

(School of Computer Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

[Abstract] Using Ricci curvature flow, the original surface panel measure is pushed forward to the target parameter domain to form the initial panel measure. After transforming the initial panel measure or the target panel measure, a series of continuous transformation panel measure sequences are constructed. Then the parameterized sequence clusters of continuous transformation is constructed by calculating the optimal transmission mapping between the panel measures. The transformation experiments are carried out by using Moebius transformation, curvature reinforcement and importance drive, and results show that compared with the Quasi-area method, this method can construct a variety of different parameterized sequence clusters and achieve better special parameterized effect.

[Key words] parameterized sequence clusters; optimal transmission mapping; Ricci curvature flow; measure control; Moebius transformation

DOI: 10.19678/j.issn.1000-3428.0048705

0 概述

网格参数化指嵌入三维空间中的网格到一个相对简单参数域上的一一映射^[1], 其目的是将原始网格上的操作转移到简单参数域上, 从而简化操作过程。网格参数化是计算机图形学和几何处理应用中的基本问题, 在纹理映射、重网格化、曲面拟合、形状分析等方面有重要应用^[1]。

理想的网格参数化方法是无畸变参数化, 但除可展曲面外, 对于一般曲面而言, 无畸变参数化并不存在^[2]。现有的网格参数化研究主要关注如何减小参数化所带来的几何畸变。参数化所导致的畸变包

括面积畸变和角度畸变。对于一个参数化 $\varphi: M \rightarrow \mathbb{D}$, 顶点 v_i 的面积畸变^[3] 可以定义为 $\zeta_i =$

$$\log_a \frac{\sum_{j,k} A([\varphi(v_i), \varphi(v_j), \varphi(v_k)])}{\sum_{j,k} A([v_i, v_j, v_k])}, \text{ 其中, } [v_i, v_j, v_k]$$

表示顶点 $\{v_i, v_j, v_k\}$ 构成的三角形, $A(\cdot)$ 表示三角形的面积。类似地, 角度畸变^[3] 可以表示为 $\eta_{ijk} =$

$$\log_a \frac{\angle \varphi(v_i) \varphi(v_j) \varphi(v_k)}{\angle v_i v_j v_k}。 \text{ 根据这 2 种畸变, 可以将}$$

参数化大致分为 3 类: 保角参数化, 保面积参数化, 在角度畸变与面积畸变之间寻求平衡的参数化。其中, 最小化角度畸变的保角参数化有调和能量方程

基金项目: 国家自然科学基金(61772379)。

作者简介: 夏诗羽(1993—), 女, 硕士研究生, 主研方向为计算共形几何; 苏科华, 副教授、博士; 陈彩玲, 硕士研究生。

收稿日期: 2017-09-18 **修回日期:** 2017-12-18 **E-mail:** skh@whu.edu.cn

最小化^[4]、全纯微分^[5]、中值^[6]、LSCM^[7]、ABF^[8]、MIPS^[9]等。最小化面积畸变的保面积参数化有 Lie Advection^[10]、拟等积 (Quasi-area)^[11]、最优传输^[12-14]等。在角度畸变和面积畸变之间寻求平衡的参数化有 ARAP^[15]等。

但是, 现有的参数化方法一般只能生成单一的参数化结果。为构造一系列连续变化的参数化序列簇, 本文基于最优传输理论, 利用 Ricci 曲率流将原曲面上的面元测度前推到目标参数域上形成初始面元测度, 在参数域上对初始面元测度或目标面元测度进行连续变换, 计算原始面元测度到目标面元测度的最优传输映射, 以构造连续变化的参数化序列簇。

1 最优传输理论

1.1 最优传输问题

文献[16]提出经典的最优传输问题。给定欧式空间 \mathbb{R}^n 中的凸域 X 和 Y , X 与 Y 分别赋予概率测度 μ 和 ν , 它们的总测度相同, 即:

$$\int_X \mu = \int_Y \nu \quad (1)$$

对于微分同胚映射 $T: X \rightarrow Y$, 如果对任意一个博莱尔集合 $B \subset Y$ 有:

$$\int_{T^{-1}(B)} \mu = \int_B \nu \quad (2)$$

那么映射 $T: X \rightarrow Y$ 是保测度的。

设 $x \in X$ 到 $y \in Y$ 的传输代价为 $c(x, y)$, 定义 T 的总传输代价为:

$$E(T) := \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) \quad (3)$$

最优传输问题即寻找一个保测度的映射 T , 使得式(3)的传输代价最小。

1.2 最优传输问题的求解方法

求解最优传输问题主要有 Kantorovich 方法^[17]和 Brenier 方法^[18]。

俄国数学家 Kantorovich 证明了最优传输解的存在性和唯一性, 并将最优传输问题转化成线性规划问题^[17]。Kantorovich 方法将源域 X 和目标域 Y 离散化成点集 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 和 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, 并分别赋予离散测度 $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ 和 $\nu = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$ 。传输规划可以表示为 $\{\gamma_{ij}\}$, $\sum_i \gamma_{ij} = \sum_j \gamma_{ij} = 1$, 其中, γ_{ij} 为 μ_i 中从 x_i 传输到 y_j 的质量百分比。则传输代价为线性函数 $\sum_{ij} \gamma_{ij} c(x_i, y_j)$, 最优传输可以通过求解 n^2 个变量的线性规划得到。但是, Kantorovich 方法有 n^2 个未知变量, 计算开销较大。

法国数学家 Brenier 研究证明, 如果传输距离是平方欧氏距离 $c(x, y) = |x - y|^2$, 那么存在一个凸函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, 最优传输映射 $T: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ 由梯度

映射 $T: x \mapsto \nabla f(x)$ 给定, 凸函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 被称为 Brenier 势能函数。Brenier 方法将变量数从 n^2 减少到 n , 能够有效减少计算开销, 提高计算效率。

1.3 离散最优传输

根据 Brenier 理论, 离散最优传输映射为离散 Brenier 势能函数的梯度映射。定义 $\Omega = \text{supp } \mu = \{x \in X | \mu(x) > 0\}$ 是源域 X 上的凸域。将目标域 Y 离散化成离散点 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, 赋予 Dirac 测度 $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i \delta(y - y_i)$ 。

定义截距向量 $\mathbf{h} := (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ 。对每个顶点 $y_i \in Y$, 构造超平面:

$$\pi_i(\mathbf{h}) := \langle x, y_i \rangle + h_i \quad (4)$$

Brenier 势能函数定义为:

$$f_h(x) := \max_{i=1}^n \{\pi_i(\mathbf{h})\} \quad (5)$$

其中, $f_h(x)$ 是凸函数, 其图记为 $G(\mathbf{h})$, $G(\mathbf{h})$ 是一个开放的凸多面体, $\pi_i(\mathbf{h})$ 构成其支撑平面。 $G(\mathbf{h})$ 在平面上的投影即为 Ω 的一个多面体划分:

$$\Omega = \cup W_i(\mathbf{h}) \quad (6)$$

其中, $W_i(\mathbf{h})$ 为 $G(\mathbf{h})$ 的面在 Ω 上的投影。

由于凸函数 $f_h(x)$ 在每个胞腔 $W_i(\mathbf{h})$ 上限制为线性函数 $\pi_i(\mathbf{h})$, 因此 $f_h(x)$ 的梯度映射为:

$$\nabla f_h(x) : W_i(\mathbf{h}) \mapsto y_i \quad (7)$$

式(7)将胞腔 $W_i(\mathbf{h})$ 映射到离散点 y_i 。

由保测度性质可知, 通过对平面的截距进行调节, 使得每个胞腔的面积等于其对应离散点的测度, 得到的离散映射 $\nabla f_h(x) : W_i(\mathbf{h}) \mapsto y_i$ 即为最优传输映射 T 。文献[19]证明了该截距的存在性和唯一性。文献[20]提出运用变分法求解截距, 方法如下: 首先定义高度向量的容许空间:

$$H := \left\{ \mathbf{h} \mid \int_{W_i(\mathbf{h})} \mu > 0, \sum_{i=1}^n h_i = 0 \right\} \quad (8)$$

每个胞腔 $W_i(\mathbf{h})$ 的面积记为 $w_i(\mathbf{h})$:

$$w_i(\mathbf{h}) = \int_{W_i(\mathbf{h})} \mu(x) dx$$

定义能量为:

$$E(\mathbf{h}) := \int_{\Omega} |x - T(x)|^2 \mu(x) dx \quad (9)$$

能量梯度由式(10)给出。

$$\nabla E(\mathbf{h}) = (v_1 - w_1(\mathbf{h}), v_2 - w_2(\mathbf{h}), \dots, v_n - w_n(\mathbf{h}))^T \quad (10)$$

假设 $W_i(\mathbf{h})$ 和 $W_j(\mathbf{h})$ 两个相邻胞腔相交于边 $e_{ij}(\mathbf{h})$, 计算 $e_{ij}(\mathbf{h})$ 的边长后得到能量 $E(\mathbf{h})$ 的 Hessian 矩阵:

$$\frac{\partial^2 E(\mathbf{h})}{\partial h_i \partial h_j} = \begin{cases} \int_{e_{ij}} \mu, & W_i(\mathbf{h}) \cap W_j(\mathbf{h}) \cap \Omega \neq \emptyset \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

因为能量 $E(\mathbf{h})$ 在容许空间中是凸的, 所以存在

唯一的全局最小点,该点处 $\nabla E(\mathbf{h}) = 0$ 。此时梯度映射 $\nabla f_h(x)$ 满足胞腔面积与目标测度相等且传输代价最小。根据 Brenier 理论, $\nabla f_h(x)$ 即为最优传输映射。

2 参数化序列簇构造

给定一个三角网格 M , 计算 M 到平面凸域 Ω 的参数化序列簇, 方法流程如图 1 所示。首先初始化目标参数域和面元测度, 然后变换原始面元测度或目标面元测度以构造面元测度序列, 最后计算原始面元测度到目标面元测度的最优传输映射簇, 以得到连续变换的参数化序列簇。

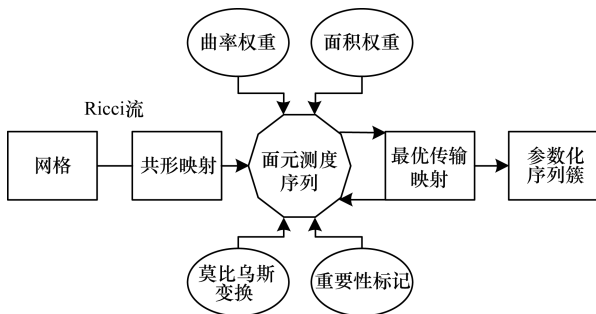


图 1 参数化序列簇构造流程

2.1 目标参数域初始化

对网格进行处理后构造初始参数化映射, 将网格的面元测度前推到平面上。具体方法为: 首先对网格 M 进行缩放使其总面积等于 π , 然后使用离散 Ricci 流方法计算共形映射 $\varphi: M \rightarrow [21]$, 每个点 $v_i \in M$ 的像 $\varphi(v_i)$ 作为平面上的采样点 y_i , 由此得到目标域上点集的初始位置 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, 每个采样点 y_i 赋予 Dirac 测度 ν_i , 同时对 Y 进行缩放移动使得 Y 中的点都落在 Ω 上。

2.2 面元测度序列构造

2.2.1 基于莫比乌斯变换的目标面元测度序列

莫比乌斯变换又称分式线性变换, 是扩充复平面上的——对应变换, 其一般形式定义如下:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (12)$$

其中, a, b, c, d 为复数且满足 $ad - bc \neq 0$ 。 $ad - bc \neq 0$ 保证了映射的保角性。

曲面到圆盘的保角映射并不唯一, 这些保角映射之间两两相差一个莫比乌斯变换。因此, 应用莫比乌斯变换对平面上的原始面元测度进行变换, 可以得到基于莫比乌斯变换的面元测度序列。

对于三角网格 M 的每个顶点 $v_i \in M$, 定义目标面元测度 ν_i 为该顶点相邻面面积和的 $\frac{1}{3} [13]$:

$$\nu_i := \frac{1}{3} \sum_{jk} A([v_i, v_j, v_k]) \quad (13)$$

通过计算由面元测度序列到目标面元测度的最优传输映射, 可得到保面积的参数化序列簇。

2.2.2 曲率强化的目标面元测度序列

在同一参数化方法下, 同一曲面不同曲率区域产生的畸变也不同。不考虑曲面曲率的参数化方法往往造成局部畸变差异较大的后果。因此, 需根据曲面的曲率来优化参数化方法。本文使用曲率增强的目标面元测度来减小高曲率模型参数化畸变, 通过调控曲率因子和面积因子的比值以控制参数化对曲率的敏感度。

通过在保面积面元测度中引入高斯曲率, 可以达到曲率强化的效果。添加离散高斯曲率的绝对值 $|K(v_i)|$ 和曲率权重控制因子 λ 到式 (13) 中, 得到曲率强化的目标面元测度, 如式 (14) 所示。

$$\nu_i := \frac{1}{3} \sum_{jk} A([v_i, v_j, v_k]) + \lambda |K(v_i)| \quad (14)$$

2.2.3 重要性驱动的目标面元测度序列

感兴趣区域 (Region of Interest, ROI) 是网格中用户最感兴趣、最关注的区域。因为拥有不同的背景、研究目的等, 不同用户对同一网格的关注度也不同。重要性驱动的参数化序列簇能够由用户选取感兴趣区域, 并根据其重要程度自由控制不同区域在参数域上的面积大小。本文通过引入放大因子来实现重要性可控的目的。

定义放大因子为 τ , 对于感兴趣区域, 目标面元测度乘以放大因子 τ , 可得到重要性驱动的目标面元测度, 如式 (15) 所示。

$$\nu_i := \tau \cdot \nu_i \quad (15)$$

2.3 离散最优传输映射算法

离散最优传输映射算法步骤如下:

步骤 1 定义目标面元测度 $\bar{w}_i = \nu_i, \nu_i$ 由前文所述方法构造。

步骤 2 初始化截距向量:

$$h_i = -\frac{1}{2} \|y_i\|^2, i = 1, 2, \dots, n$$

步骤 3 定义超平面 $\{\pi_i(\mathbf{h}) := \langle x, y_i \rangle + h_i\}$,

凸函数 $f_h(x) := \max_{i=1}^n \{\pi_i(\mathbf{h})\}$, 该函数的图 $G(\mathbf{h})$ 通过计算支撑平面族 $\{\pi_i(\mathbf{h})\}$ 的上包络得到。根据勒让德对偶原理, 可以使用增量凸包算法 [22] 计算 $\{\pi_i(\mathbf{h})\}$ 对偶点 $\{\pi_i^*(\mathbf{h})\}$ 的凸包, 凸包的对偶即为 $\{\pi_i(\mathbf{h})\}$ 的上包络。

步骤 4 计算上包络在平面圆盘的投影加权泰森多边形图, $\Omega = \cup W_i(\mathbf{h})$, 胞腔 $W_i(\mathbf{h})$ 的面积 $w_i(\mathbf{h}) = \text{Area}(W_i(\mathbf{h}))$ 。由加权泰森多边形图计算得到对偶带权三角剖分。

步骤 5 根据式 (11) 计算 Hessian 矩阵。

步骤 6 $\mathbf{h} \leftarrow \mathbf{h} + H^{-1}(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w})$ 。

步骤 7 重复步骤 4 ~ 步骤 6, 直到所有胞腔的 $\|\bar{w}_i - w_i\|$ 均小于阈值 ϵ 。

步骤 8 得到最优传输映射:

$$\varphi: \Omega \rightarrow Y, W_i(\mathbf{h}) \rightarrow y_i, i = 1, 2, \dots, n$$

2.4 参数化序列簇算法

参数化序列簇算法描述如下:

输入 三角网格 M , 阈值 ϵ 。

输出 参数化序列簇 $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$, 其中, $\varphi_i: M \rightarrow$

1. 读入网格 M , 初始化目标域。
2. 使用前文所述方法构造面元测度序列。
3. 使用离散最优传输映射算法计算最优传输映射 $\varphi: \rightarrow (Y, \nu)$ 。
4. 不断调整面元测度参数并计算最优传输映射。
5. 得到参数化序列簇 $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ 。

3 实验结果与分析

3.1 保面积的参数化序列簇

图 2 所示为一个保面积参数化序列簇实例。图 2(a) 是作为输入的人脸模型, 该模型有嘴巴和脸部边缘 2 个边界。计算曲面到圆盘的保角参数化并在圆盘上选取多对点进行莫比乌斯变换, 生成一组连续变换的保角映射并得到保角参数化序列簇, 如图 2(b) 所示。将保面积面元测度设置为目标面元测度, 计算原始面元测度到目标面元测度的最优传输映射, 得到图 2(c) 所示的保面积参数化序列簇。



图 2 多边界人脸模型的保面积参数化序列簇

3.2 曲率敏感的参数化序列簇

图 3 所示为一个单边界人脸模型的曲率敏感参数化序列簇。图 3(a) 是单边界人脸模型, 其中, 人的五官部分含有多道褶皱, 而额头及头顶部位较光滑。图 3(b) 和图 3(c) 分别为其保角参数化和保面积参数化。将曲率强化的面元测度设为目标面元测度, 计算原始面元测度到目标面元测度的最优传输

映射簇, 取 λ 值分别为 0.1、0.2、0.4、0.8、1.0 和 2.0, 即可得到图 3(d) 所示的一组曲率敏感参数化序列簇。可以看出, 在保角参数化中, 人的五官部位在参数域上的面积比较小, 保面积映射在参数域上等积映射了五官部分, 而曲率敏感的参数化序列簇增大了五官区域在参数域上的面积比, 使得褶皱较多、曲率变化较大的五官部分能够保留更多的细节。

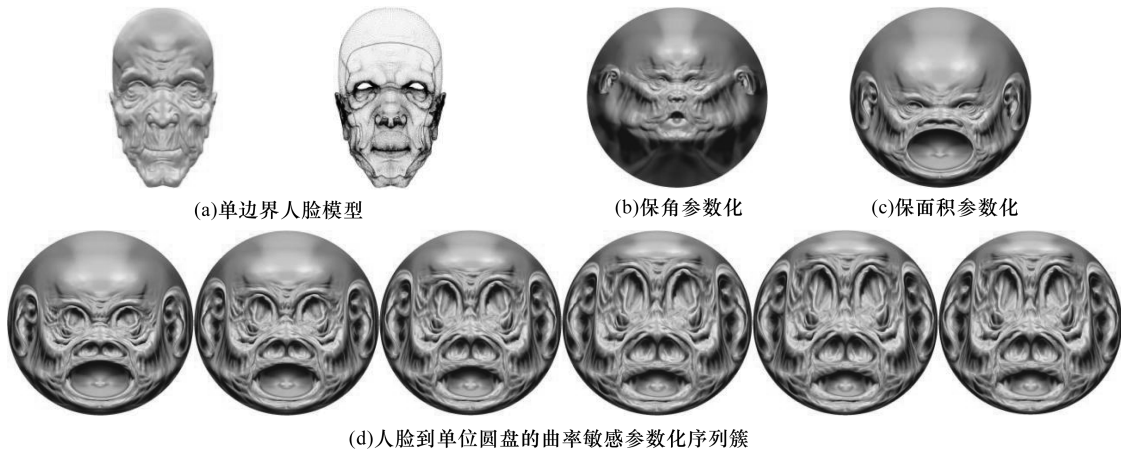


图 3 单边界人脸模型的曲率敏感参数化序列簇

3.3 重要性驱动的参数化序列簇

图 4 以一个佛像模型为例,展示了重要性驱动的参数化序列簇。图 4(a)为佛像模型,图 4(b)和图 4(c)分别为其保角参数化和保面积参数化。将佛像的头部设为感兴趣区域,其顶点加深灰度,如图 4(d)所示。将目标面元测度与放大因子的乘积作为新的目标面元测度,计算最优

传输映射后可得到重要性驱动的参数化序列簇。取放大因子 τ 为 2、4、8、16、32 和 64,得到如图 4(e)所示的一组不同放大因子下的重要性驱动参数化序列簇。重要性驱动参数化序列簇可以实现用户对感兴趣区域的自主控制,通过放大参数域上感兴趣区域并缩小其他区域,从而赋予感兴趣区域更多的细节空间。

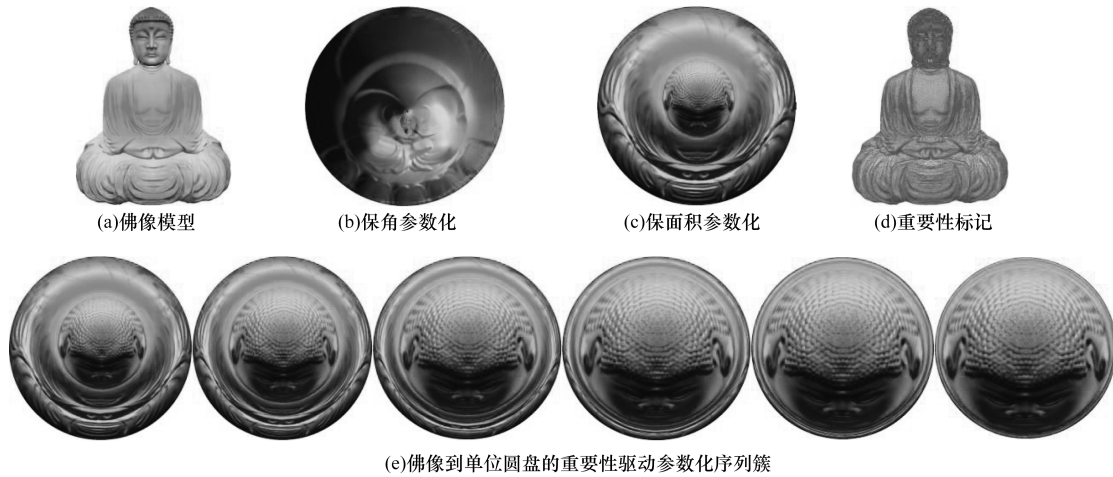


图 4 佛像模型的重要性驱动参数化序列簇

3.4 性能分析

参数化的效果可以用畸变程度衡量^[23]。本节通过计算畸变面积^[24]来对保面积参数化序列簇实验结果进行分析,并与拟等积方法作对比。由于拟等积方法不能处理多边界模型,因此采用单边界模型进行实验,模型如图 5(a)所示,本文方法和拟等积方法生成的参数化序列簇分别如图 5(b)和图 5(c)所示。通过对比可以看出,相比拟等积方

法,本文方法生成的参数化序列簇个体间有较大的差异,序列簇变化更加明显。图 6 所示为图 5(b)和图 5(c)对应的面积畸变结果对比。从图 6 可以看出,本文方法中参数化前后三角形面积比的平均值为 1.008 8,拟等积方法平均值为 0.790 8。同时可以看出,本文方法参数化前后三角形面积比在“1”处有更高的集中度。通过以上实验结果可知,相比拟等积方法,本文参数化方法的面积畸变较小。



图 5 本文方法与拟等积方法生成的参数化序列簇对比

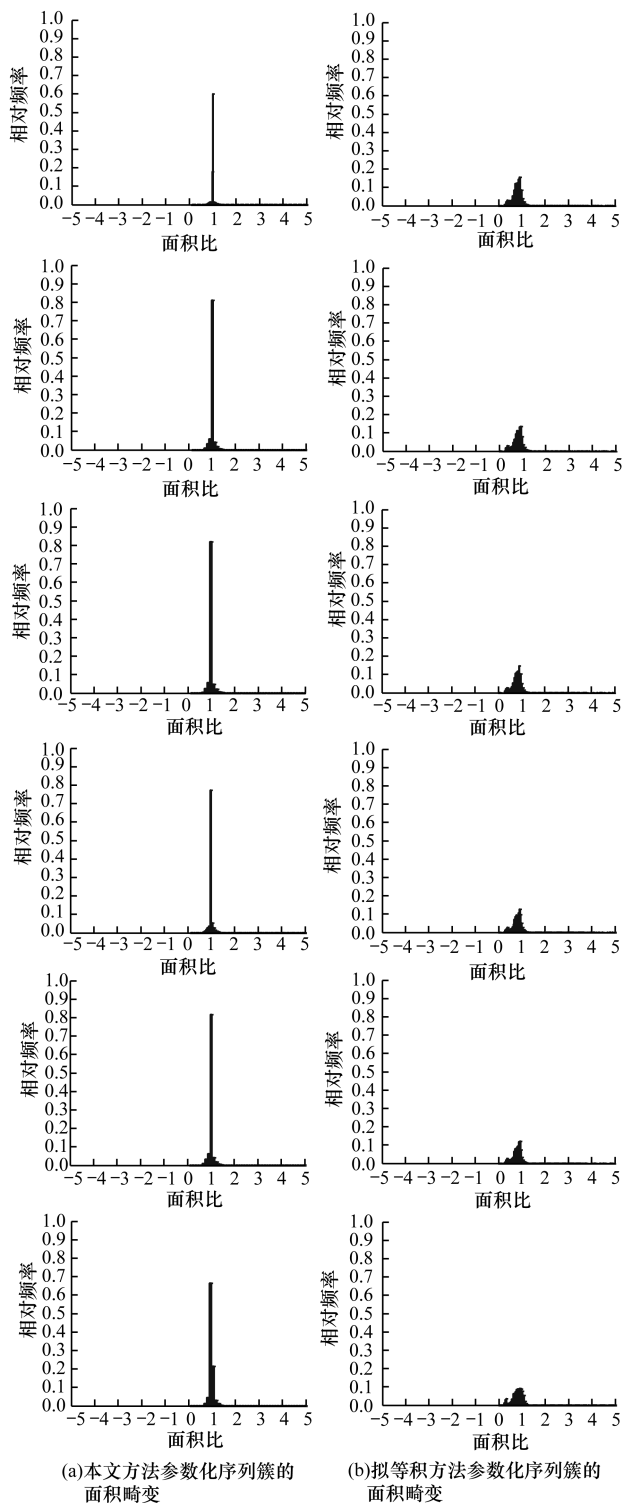


图 6 2 种方法生成参数化序列簇的面积畸变对比

4 结束语

本文提出一种基于最优传输的参数化序列簇方法。通过构造连续变换的面元测度序列, 计算原始面元测度到目标面元测度的最优传输映射, 以得到参数化序列簇。通过莫比乌斯变换、曲率强化和重要性驱动 3 种测度序列构造方法实现不同效果的参

数化序列簇, 结果表明, 本文方法具有良好的普适性和通用性。下一步将对参数化序列簇的测度变换和控制方法进行深入研究, 以进一步提高本文方法的参数化效果。

参考文献

- [1] HORMANN K, POLTHIER K, SHEFFER A. Mesh parameterization; theory and practice [C] // Proceedings of SIGGRAPH Asia ' 08. New York, USA: ACM Press, 2008: 60-87.
- [2] FLOATER M S, HORMANN K. Surface parameterization; a tutorial and survey [M] // DODGSON N A, FLOATER M S, SABIN M A. Advances in multiresolution for geometric modelling. Berlin, Germany: Springer, 2005.
- [3] SU Z, WANG Y, SHI R, et al. Optimal mass transport for shape matching and comparison [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2015, 37(11): 2246-2259.
- [4] DESBRUN M, MEYER M, ALLIEZ P. Intrinsic parameterizations of surface meshes [J]. Computer Graphics Forum, 2010, 21(3): 209-218.
- [5] GU X, YAU S T. Global conformal surface parameterization [C] // Proceedings of 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing. New York, USA: ACM Press, 2003: 127-137.
- [6] FLOATER M S. Mean value coordinates [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(1): 19-27.
- [7] LÉVY B, PETITJEAN S, RAY N, et al. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation [C] // Proceedings of the 29th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York, USA: ACM Press, 2002: 362-371.
- [8] SHEFFER A, DE STURLER E. Surface parameterization for meshing by triangulation flattening [EB/OL]. [2017-09-15]. <http://www.math.vt.edu/people/sturler/Publications/IMR9proc.pdf>.
- [9] HORMANN K, GREINER G. MIPS; an efficient global parameterization method [EB/OL]. [2017-09-15]. <http://www.inf.usi.ch/hormann/papers/Hormann.2000.MAE.pdf>.
- [10] ZOU G, HU J, GU X, et al. Authalic parameterization of general surfaces using Lie advection [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2011, 17(12): 2005-2014.
- [11] YOSHIZAWA S, BELYAEV A, SEIDEL H P. A fast and simple stretch-minimizing mesh parameterization [C] // Proceedings of SMI ' 04. Washington D. C., USA: IEEE Computer Society, 2004: 200-208.
- [12] DOMINITZ A, TANNENBAUM A. Texture mapping via optimal mass transport [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2010, 16(3): 419-433.
- [13] ZHAO X, SU Z, GU X D, et al. Area-preservation mapping using optimal mass transport [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2013, 19(12): 2838-2847.

(下转第 277 页)

- IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 2014, 36(2):261-275.
- [9] 孙双侠. 基于矩阵分解的鲁棒推荐算法研究[D]. 秦皇岛:燕山大学, 2013.
- [10] JIANG H, DENG W, SHEN Z. Surveillance video processing using compressive sensing[J]. Inverse Problems & Imaging, 2013, 6(2):201-214.
- [11] CAO W, WANG Y, SUN J, et al. Total variation regularized tensor RPCA for background subtraction from compressive measurements[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2016, 25(9):4075-4090.
- [12] 汪太月, 戴燕青. 一种改进的非凸秩最小化算法及其在矩阵恢复中的应用[J]. 湖北理工学院学报, 2015, 31(1):21-26.
- [13] CAI J F, CANDES E J, SHEN Z. A Singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM Journal on Optimization, 2008, 20(4):1956-1982.
- [14] CHARTRAND R. Exact reconstruction of sparse signals via nonconvex minimization[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2007, 14(10):707-710.
- [15] TRZASKO J, MANDUCA A. Highly undersampled magnetic resonance image reconstruction via homotopic L0-minimization[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2009, 28(1):106-121.
- [16] DONG W, SHI G, LI X, et al. Compressive sensing via nonlocal low-rank regularization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(8):3618-3632.
- [17] NIKOLOVA M, NG M. Analysis of half-quadratic minimization methods for signal and image recovery[M]. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005:937-966.
- [18] YUANG X T, HU B G. Robust feature extraction via information theoretic learning[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Machine Learning. Washington D. C., USA: IEEE Press, 2009:1193-1200.
- [19] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations and Trends in Machine Learning, 2010, 3(1):1-12.
- [20] DENG W, LAI M J, PENG Z, et al. Parallel multi-block ADMM with $O(1/k)$ convergence[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 71(2):712-736.
- [21] HONG M, LUO Z. On the linear convergence of the alternating direction method of multipliers[J]. Mathematical Programming, 2017, 162(1/2):165-199.
- [22] MOTA J F C, XAVIER J M F, AGUIAR P M Q, et al. D-ADMM: a communication-efficient distributed algorithm for separable optimization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(10):2718-2723.
- [23] SHEN Y, WEN Z, ZHANG Y. Augmented lagrangian alternating direction method for matrix separation based on low-rank factorization[J]. Optimization Methods & Software, 2014, 29(2):239-263.
- [24] KOLDA T, BADER B. Tensor decompositions and applications[J]. SIAM Review, 2009, 51(3):455-500.
- [25] PHAM D S, VENKATESH S. Improved image recovery from compressed data contaminated with impulsive noise[J]. IEEE Transactions on Image Processing A Publication of the IEEE Signal Processing Society, 2012, 21(1):397-405.
- [26] WATERS A E, SANKARANARAYANAN A C, BARANIUK R G. SpaRCS: recovering low-rank and sparse matrices from compressive measurements[C]//Proceedings of International Conference on Neural Information Processing Systems. Washington D. C., USA: IEEE Press, 2011:1089-1097.
- [27] LIU Y, PADOS D A. Compressed-sensed-domain L1-PCA video surveillance[C]//Proceedings of IEEE SPIE'15. Washington D. C., USA: IEEE Press, 2015:351-363.
- [28] GUO H, QIU C, VASWANI N. An online algorithm for separating sparse and low-dimensional signal sequences from their sum[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 62(16):4284-4297.

编辑 索书志

(上接第269页)

- [14] SU K, CUI L, QIAN K, et al. Area-preserving mesh parameterization for poly-annulus surfaces based on optimal mass transportation[J]. Computer Aided Geometric Design, 2016, 46(C):76-91.
- [15] LIU L, ZHANG L, XU Y, et al. A local/global approach to mesh parameterization[J]. Computer Graphics Forum, 2008, 27(5):1495-1504.
- [16] BONNOTTE N. From Knothe's rearrangement to Brenier's optimal transport map[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2012, 45(1):64-87.
- [17] KANTOROVICH L V. On a problem of Monge[J]. Journal of Mathematical Sciences, 2006, 133(4):1383-1386.
- [18] BRENIER Y. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1991, 44(4):375-417.
- [19] ALEXANDROV A D. Convex polyhedra[M]. Berlin, Germany: Springer, 2005.
- [20] GU X, LUO F, SUN J, et al. Variational principles for Minkowski type problems, discrete optimal transport, and discrete Monge-ampere equations[EB/OL]. [2017-09-15]. http://www.oalib.com/paper/3870868#.W-JWK_mtg_Uw.
- [21] WANG Y, SHI J, YIN X, et al. Brain surface conformal parameterization with the Ricci flow[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2012, 31(2):251-264.
- [22] DEBERG M, VANKREVELD M, OVERMARS M, et al. Computational geometry: algorithms and applications[J]. Mathematical Gazette, 2008, 19(3):333-334.
- [23] 彭群生, 胡国飞. 三角网格的参数化[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(6):731-739.
- [24] 郭凤华, 张彩明, 焦文江. 网格参数化研究进展[J]. 软件学报, 2016, 27(1):112-135.

编辑 吴云芳