

基于等价三维熵与鲸鱼优化算法的图像分割研究

雷翔霄^{1,2}, 欧阳红林¹, 肖乐意¹, 范朝冬³

(1. 湖南大学 电气与信息工程学院, 长沙 410082; 2. 长沙民政职业技术学院 电子信息工程学院, 长沙 410004;
3. 湘潭大学 信息工程学院, 湖南 湘潭 411105)

摘 要: 为提高三维最大熵法对图像分割的时效性, 提出一种基于等价三维熵与鲸鱼优化算法(WOA)的图像分割方法。设计一种不含对数运算的等价三维熵法, 基于 WOA 算法求解最佳阈值, 以避免穷举搜索并提高算法效率。实验结果表明, 相比传统三维最大熵法、等价三维最大熵法, 该方法在不影响分割效果的前提下, 能够减少运行时间, 且在抗噪性和保留图像细节方面具有明显优势。

关键词: 图像分割; 最大熵; 三维直方图; 群智能优化算法; 鲸鱼优化算法

中文引用格式: 雷翔霄, 欧阳红林, 肖乐意, 等. 基于等价三维熵与鲸鱼优化算法的图像分割研究[J]. 计算机工程, 2019, 45(4): 217-222.

英文引用格式: LEI Xiangxiao, OUYANG Honglin, XIAO Leyi, et al. Research on image segmentation based on equivalent 3-D entropy and whale optimization algorithm[J]. Computer Engineering, 2019, 45(4): 217-222.

Research on Image Segmentation Based on Equivalent 3-D Entropy and Whale Optimization Algorithm

LEI Xiangxiao^{1,2}, OUYANG Honglin¹, XIAO Leyi¹, FAN Chaodong³

(1. College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China;
2. College of Electronic and Information Engineering, Changsha Social Work College, Changsha 410004, China;
3. College of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, China)

[Abstract] In order to improve the timeliness of 3-D maximum entropy method for image segmentation, an image segmentation method based on equivalent 3-D entropy and Whale Optimization Algorithm (WOA) is proposed. An equivalent 3-D entropy method without logarithmic operation is designed to solve the optimal threshold based on WOA algorithm to avoid exhaustive search and improve the efficiency of the algorithm. Experimental results show that compared with the traditional 3-D maximum entropy method and equivalent 3-D maximum entropy method, this method can reduce the running time without affecting the segmentation effect, and has obvious advantages in noise resistance and image details preservation.

[Key words] image segmentation; maximum entropy; 3-D histogram; swarm intelligence optimization algorithm; Whale Optimization Algorithm (WOA)

DOI: 10.19678/j.issn.1000-3428.0049933

0 概述

图像分割是进行图像处理的基础和前提,也是图像处理和模式识别中的一个经典难题^[1]。对此,国内外学者进行了广泛研究,并提出多种分割算法,这些算法大体可分为 3 类:边缘检测法^[2],区域分割法^[3],阈值分割法^[4]。阈值分割法因原理简单、易于实现、分割效果好,已被广泛应用。其中,最大熵阈值分割法能够反映图像的总体特征并表现出良好的分割性能,成为一种经典的阈值分割法^[5]。

传统的一维最大熵法虽然处理速度快,但其只考虑像素的灰度信息,忽略了空间相关性,导致算法抗噪性能较差。对此,文献[6]通过引入邻域灰度均值建立二维直方图,提出一种兼顾邻域均值信息的二维最大熵法。二维最大熵法虽增强了算法的抗噪性,但邻域灰度均值信息的引入也增加了算法复杂度,导致算法效率较低^[7]。为解决该问题,文献[8]通过建立查找表以避免重复计算,提出一种二维最大 Arimoto 熵的快速递归方法。文献[9]通过采用量子微粒群法求解阈值,避免了

基金项目: 国家自然科学基金(61573299);湖南省自然科学基金(2016JJ125)。

作者简介: 雷翔霄(1974—),男,副教授、博士研究生,主研方向为图像处理、智能控制;欧阳红林,教授、博士;肖乐意(通信作者),博士研究生;范朝冬,讲师、博士。

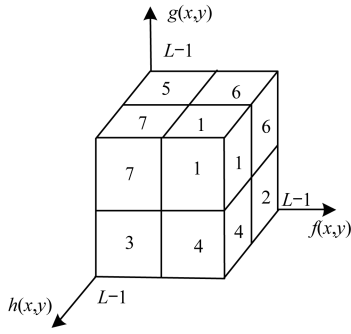
收稿日期: 2018-01-02 **修回日期:** 2018-04-10 **E-mail:** xiaolytkx@163.com

穷举计算,并提出一种基于量子微粒群算法的二维最大熵法。为进一步提高算法性能,文献[10]在二维直方图的基础上引入邻域灰度中值,提出一种三维交叉熵法,并给出其快速递推法以提高算法效率,该方法取得了较好的分割效果。

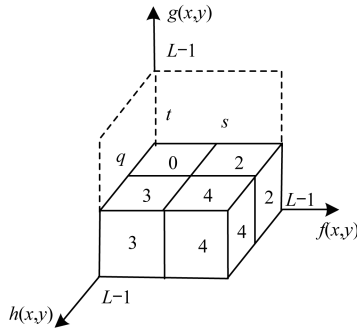
与二维最大熵法相比,三维最大熵法虽分割质量较好,但算法复杂度大幅增加。上述递归法和智能优化算法虽能在一定程度上提高算法效率,但熵的计算仍采用效率较低的对数运算,因此,算法效率仍有上升空间。本文提出一种等价三维熵法,该方法通过建立等价的目标函数来避免对数运算。鉴于鲸鱼优化算法(Whale Optimization Algorithm, WOA)良好的寻优性能,围绕目标函数,本文设计一种新型阈值求解方法,以进一步提高算法的时效性。

1 三维最大熵法

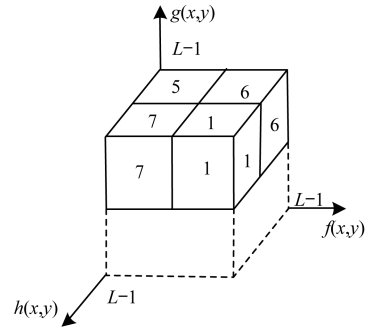
设 I 为一幅尺寸为 $M \times N$ 的图像,像素 (x, y) 所对应的灰度值为 $f(x, y)$, $f(x, y) \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ 。像素 (x, y) 的 $K \times K$ 邻域灰度均值 $g(x, y)$ 和灰度中值 $h(x, y)$ 分别定义如下:



(a) 三维直方图区域划分



(b) 区域0、区域2、区域3、区域4的划分



(c) 区域1、区域5、区域6、区域7的划分

图1 三维直方图及其划分示意图

依据熵的定义,图像 I 的总熵为:

$$H(s, t, q) = - \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \sum_{k=0}^q p_{ijk}^0 \ln p_{ijk}^0 - \sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} \sum_{k=q+1}^{L-1} p_{ijk}^1 \ln p_{ijk}^1 \quad (5)$$

$$\text{其中, } p_{ijk}^0 = \frac{P_{ijk}}{\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \sum_{k=0}^q p_{ijk}}, p_{ijk}^1 = \frac{P_{ijk}}{\sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} \sum_{k=q+1}^{L-1} p_{ijk}}.$$

依据最大熵原理,最佳阈值为:

$$(s^*, t^*, q^*) = \text{Arg} \left\{ \max_{0 \leq (s, t, q) \leq L-1} (H(s, t, q)) \right\} \quad (6)$$

$$H_1(s, t, q) = - \left\{ \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \sum_{k=0}^q \left(p_{ijk}^0 - \frac{1}{stq} \right)^2 + \sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} \sum_{k=q+1}^{L-1} \left[p_{ijk}^1 - \frac{1}{(L-s-1)(L-t-1)(L-q-1)} \right]^2 \right\} \quad (7)$$

根据式(6),最佳阈值 (s^*, t^*, q^*) 为:

$$(s^*, t^*, q^*) = \text{Arg} \left\{ \max_{0 \leq (s, t, q) \leq L-1} (H_1(s, t, q)) \right\} \quad (8)$$

$$g(x, y) = \frac{\sum_{i=-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} \sum_{j=-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} f(x+i, y+j)}{K^2} \quad (1)$$

$$h(x, y) = \text{med} \left\{ \sum_{i=-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} \sum_{j=-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} f(x+i, y+j) \right\} \quad (2)$$

$f(x, y)$ 、 $g(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 可组成三元组 (i, j, k) 。如用 n_{ijk} 表示图像 I 中灰度值为 i 、邻域灰度均值为 j 、邻域灰度中值为 k 的像素所出现的频数,则其频率 p_{ijk} 为^[11]:

$$p_{ijk} = \frac{n_{ijk}}{M \times N} \quad (3)$$

根据香农熵的定义,三维离散熵可定义为:

$$H = - \sum_i \sum_j \sum_k p_{ijk} \ln p_{ijk} \quad (4)$$

三维最大熵法基于图1所示的三维直方图,用阈值 (s, t, q) 将图像分成目标区0和背景区1,区域2~区域7为边缘和噪声区。可以看出,三维最大熵法能最大程度地包含图像中的目标和背景信息,从而尽可能地保留图像中的细节。

2 等价三维熵法

2.1 等价性证明

由式(5)可知,三维熵的计算过程中存在大量对数运算,对数运算的低效率严重制约了三维熵法的广泛应用。对此,本文提出一种新的三维最大熵法,采用效率较高的减法运算代替对数运算,以提高算法整体效率。该方法与传统三维最大熵法的等价性证明如下。

定义1 等价三维熵定义为:

定理1 依据式(6)和式(8)所求的最佳阈值相等,可得等价三维熵法与传统三维熵法等效。

证明

$$\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \sum_{k=0}^q p_{ijk}^0 = 1, \sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} \sum_{k=q+1}^{L-1} p_{ijk}^1 = 1 \quad (9)$$

依据拉格朗日乘数法^[12], 引入常量 α 、 β , 则由式(5)可得:

$$\begin{aligned} H(s, t, q) = & - \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \sum_{k=0}^q p_{ijk}^0 \ln p_{ijk}^0 - \\ & \sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} \sum_{k=q+1}^{L-1} p_{ijk}^1 \ln p_{ijk}^1 + \\ & \alpha \left(\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \sum_{k=0}^q p_{ijk}^0 - 1 \right) + \\ & \beta \left(\sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} \sum_{k=q+1}^{L-1} p_{ijk}^1 - 1 \right) \end{aligned} \quad (10)$$

分别对 p_{ijk}^0 和 p_{ijk}^1 求偏导, 并令导数为 0, 得:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_{ijk}^0} = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \sum_{k=0}^q (\alpha - \ln p_{ijk}^0 - 1) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial p_{ijk}^1} = \sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} \sum_{k=q+1}^{L-1} (\beta - \ln p_{ijk}^1 - 1) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

解式(11)所示的方程组, 得:

$$\begin{cases} p_{ijk}^0 = e^{\alpha-1} \\ p_{ijk}^1 = e^{\beta-1} \end{cases} \quad (12)$$

由式(9)、式(12)可得:

$$\begin{cases} e^{\alpha-1} = \frac{1}{stq} \\ e^{\beta-1} = \frac{1}{(L-s-1)(L-t-1)(L-q-1)} \end{cases} \quad (13)$$

有:

$$\begin{cases} p_{ijk}^0 = \frac{1}{stq} \\ p_{ijk}^1 = \frac{1}{(L-s-1)(L-t-1)(L-q-1)} \end{cases} \quad (14)$$

由以上可知, $\left(\frac{1}{stq}, \frac{1}{(L-s-1)(L-t-1)(L-q-1)} \right)$

能使式(5)取得最大值, 又由式(7)可知, $\left(\frac{1}{stq}, \frac{1}{(L-s-1)(L-t-1)(L-q-1)} \right)$ 也是 $H_1(s, t, q)$ 的最大值点。因此, 依据式(6)和式(8)所求的最佳阈值相等, 可得等价三维熵法与传统三维熵法等效。

2.2 鲸鱼优化算法

由式(7)可知, 对于任意阈值向量 (s, t, q) , 需要进行 $stq + (L-s-1)(L-t-1)(L-q-1)$ 次累加求和运算, 其计算复杂度为 $O(L^3)$, 又有 $0 \leq (s, t, q) \leq L-1$, 因此, 对于任意图像, 总计算复杂度为 $O(L^6)$ ^[13]。可以看出, 用穷举搜索法求

解式(7)的最佳阈值时算法效率较低。智能优化算法能有效避免穷举计算, 提高算法效率, 且已被广泛应用于复杂性问题的求解中^[14-15], 但现有智能优化算法普遍存在早熟和易陷入局部值等问题^[16]。对此, 文献[17]通过模拟鲸鱼群体的捕食行为, 提出一种新型智能优化算法 WOA。该算法具有参数少、易实现、全局搜索能力强等诸多优点, 与微粒群算法 (Particle Swarm Optimization, PSO)、灰狼算法 (Grey Wolf Optimization, GWO) 和引力搜索算法 (Gravitational Search Algorithm, GSA) 相比, 其在收敛速度和求解精度方面具有明显优势^[17]。

鉴于 WOA 在求解复杂性问题时所表现出的优越性能, 本文利用 WOA 求解式(7)中的最佳阈值, 以进一步提高算法效率。在 WOA 中, 每个鲸鱼的位置均表示一个可行解, 觅食过程主要包括猎物包围、狩猎行为以及猎物搜索 3 个阶段^[17-18]。

2.2.1 猎物包围

在觅食时, 座头鲸需先识别猎物并将其包围。设当前最优的鲸鱼位置为 $X^*(t)$, 鲸鱼当前位置为 $X(t)$, 则猎物包围的数学模型为:

$$A = 2\gamma \times r - \gamma \quad (15)$$

$$C = 2r \quad (16)$$

$$D = |CX^*(t) - X(t)| \quad (17)$$

$$X(t+1) = X^*(t) - A \times D \quad (18)$$

其中, $\gamma = 2 - \frac{2t}{T_{\max}}$, $T_{\max}$ 表示算法的最大迭代次数, r 为 $[0, 1]$ 上的随机数。

2.2.2 狩猎行为

座头鲸以螺旋方式游向猎物, 在该过程中, 鲸鱼会逐渐缩小包围圈。模拟鲸鱼狩猎行为, WOA 算法分别设计收缩包围和螺旋式 2 种位置更新方法, 数学模型为:

$$X(t+1) = \begin{cases} X^*(t) - A \times D, & p < 0.5 \\ X^*(t) + D' e^{bl} \cos(2\pi l), & p \geq 0.5 \end{cases} \quad (19)$$

其中, b 为对数螺旋形常数, p, l 分别为 $[0, 1]$ 、 $[-1, 1]$ 上的随机数, $D' = |X^*(t) - X(t)|$ 为鲸鱼和猎物间的距离。

2.2.3 猎物搜索

除狩猎捕食行为, 座头鲸也能根据彼此的位置来随机寻猎食物, 数学模型为:

$$X(t+1) = X_{\text{rand}}(t) - A \times |C \times X_{\text{rand}}(t) - X(t)| \quad (20)$$

其中, X_{rand} 是从当前鲸鱼群中随机挑选的鲸鱼位置。

2.3 基于 WOA 的阈值优化

为避免穷举搜索并提高等价三维熵法的效率, 本文运用 WOA 求解式(8)的最佳阈值, 以实现图像

$$f_{\min}(s, t, q) = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \sum_{k=0}^q \left(p_{ijk}^0 - \frac{1}{stq} \right)^2 + \sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} \sum_{k=q+1}^{L-1} \left[p_{ijk}^1 - \frac{1}{(L-s-1)(L-t-1)(L-q-1)} \right]^2 \quad (21)$$

基于式(21)计算各鲸鱼的适应值, 并将适应值最小的鲸鱼作为当前最优鲸鱼 X^* 。

步骤 3 若 $p < 0.5$ 且 $A < 1$, 基于式(18)更新鲸鱼 X_i 的位置; 若 $p < 0.5$ 且 $A \geq 1$, 基于式(20)更新鲸鱼 X_i 的位置; 否则(即 $p \geq 0.5$), 基于式(19)更新鲸鱼 X_i 的位置。

步骤 4 基于式(21)计算各鲸鱼的适应值, 并将适应值最小的鲸鱼作为当前最优鲸鱼 X^* 。

步骤 5 如满足算法终止条件, 则输出最优阈值 $X^* = (s^*, t^*, q^*)$, 并依据该阈值进行图像分割; 否则, 返回步骤 3 并继续执行。

在本文中, 设种群规模 S_N 为 20, 算法最大迭代次数为 30, 则上述算法共进行 $20 \times 30 \times [stq + (L-s-1)(L-t-1)(L-q-1)]$ 次累加求和运算, 算法复杂度为 $O(L^3)$ 。而穷举法的算法复杂度为

分割。具体步骤如下:

步骤 1 初始化 WOA 的参数, 包括种群规模 S_N 、鲸鱼 i 的初始位置 $X_i = (s_i, t_i, q_i)$ 、最大迭代次数 $T_{\max}$ 、常数 b 以及算法结束条件。其中, $i = 1, 2, \dots, S_N$ 。

步骤 2 因为 WOA 算法用于求解极小值问题, 所以本文取式(7)的相反数为适应度函数, 则目标函数为:

$O(L^6)$, 可以看出, 本文方法的计算次数明显减少, 算法效率将大幅提高。

3 实验结果与分析

为测试本文方法的图像分割性能, 选取图 2 所示的 6 幅图像进行以下 2 组实验:

实验 1 选取阈值和运行时间 2 个指标, 对传统三维最大熵法、等价三维最大熵法和本文基于 WOA 的等价三维最大熵法进行量化比较与分析。

实验 2 将本文方法的图像分割结果与模糊聚类法^[19]、鲁棒性 Otsu 法^[20]、传统一维最大熵法和二维最大熵法的分割结果进行比较, 从视觉角度定性分析本文方法的有效性。

在上述实验中, 平台内存为 2 GB, CPU 为 Q8300 的 PC 机, 编程语言为 Matlab2010。

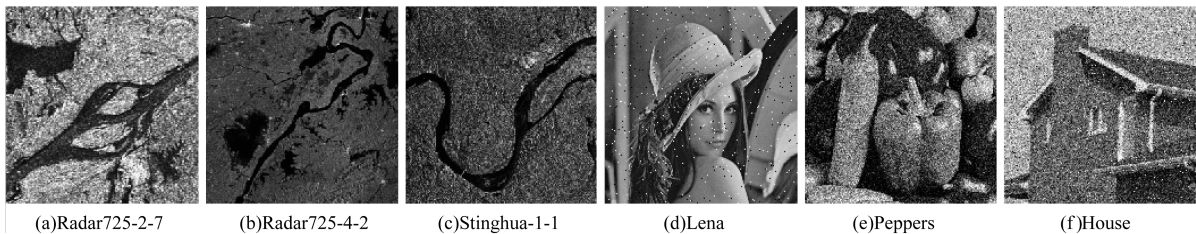


图 2 原始 SAR 图像

3.1 方法有效性验证

为验证等价三维最大熵法的有效性和采用 WOA 求解最佳阈值的合理性, 将本文基于 WOA 的等价三维最大熵法与传统三维最大熵法、等价三维最大熵法进行

量化比较。因为实验目的是验证本文方法的求解结果与传统三维最大熵法的等价性, 所以本次实验需比较各方法所求阈值的异同。为检验本文方法的效率, 需对各方法的运行时间进行比较, 结果如表 1 所示。

表 1 3 种方法分割性能比较

测试图像	传统三维最大熵法		等价三维最大熵法		基于 WOA 的等价三维最大熵法	
	阈值	运行时间/s	阈值	运行时间/s	阈值	运行时间/s
图 2(a)	(165, 172, 174)	2 255.820	(165, 172, 174)	392.899	(165, 172, 174)	22.586
图 2(b)	(190, 184, 178)	2 095.917	(190, 184, 178)	369.337	(190, 184, 178)	19.984
图 2(c)	(175, 190, 194)	2 173.494	(175, 190, 194)	381.558	(175, 190, 194)	21.279
图 2(d)	(143, 135, 146)	2 372.150	(143, 135, 146)	403.391	(143, 135, 146)	22.517
图 2(e)	(162, 159, 168)	2 241.018	(162, 159, 168)	388.527	(162, 159, 168)	21.364
图 2(f)	(116, 120, 118)	1 988.266	(116, 120, 118)	396.099	(116, 120, 118)	19.774

由表 1 可以看出:

1) 等价三维最大熵法所求的阈值与传统三维最大熵法一致, 从而验证了第 2.1 节的等价性结论。

2) 等价三维最大熵法因能避免耗时的对数运算, 算法效率得到大幅提高。

3) 基于 WOA 的等价三维最大熵法采用 WOA 求解最佳阈值, 避免了穷举搜索, 算法效率得到进一步提高。

综上, 与传统三维最大熵法、等价三维最大熵法相比, 本文基于 WOA 的等价三维最大熵法在取得同等的分割效果时, 能有效降低运行时间。

3.2 不同方法的图像分割效果比较

为测试本文方法的分割性能并验证三维最大熵法的优越性, 将各方法的图像分割结果进行比较, 结果如图 3 ~ 图 7 所示。由图 3 ~ 图 7 可以看出:

1) 模糊聚类法和一维最大熵法只考虑像素灰度信息, 忽略了像素间的空间相关性, 算法抗噪性较差。

2) 二维最大熵法引入了邻域均值信息, 算法抗噪性有所改善, 但因其阈值计算过程中将主对角线区域的概率近似假设为 1^[21], 造成了部分信息丢失, 导致图像细节分割不够准确。

3) 鲁棒性 Otsu 法采用了后处理策略纠正噪声, 算法抗噪性较强, 但在纠正噪声的过程中也造成了图像细节的丢失。

4) 本文方法基于三维直方图确定最佳阈值, 算法抗噪性较强, 同时, 由于不存在近似计算问题, 因此该方法的图像细节较丰富。

综上, 相较于对比方法, 本文方法抗噪性较强, 能较好地保留图像细节, 具有一定的优越性。

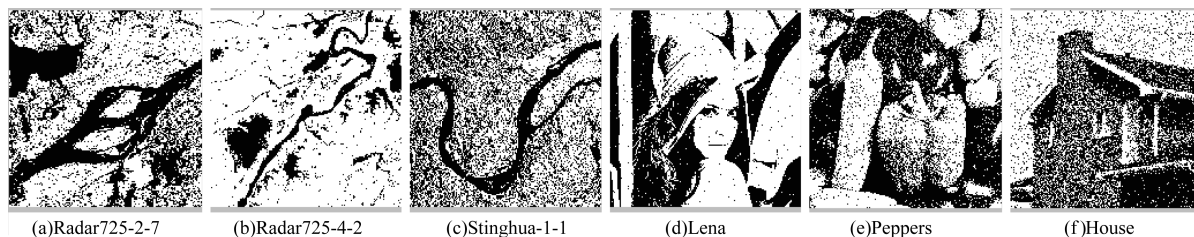


图 3 一维最大熵法分割结果

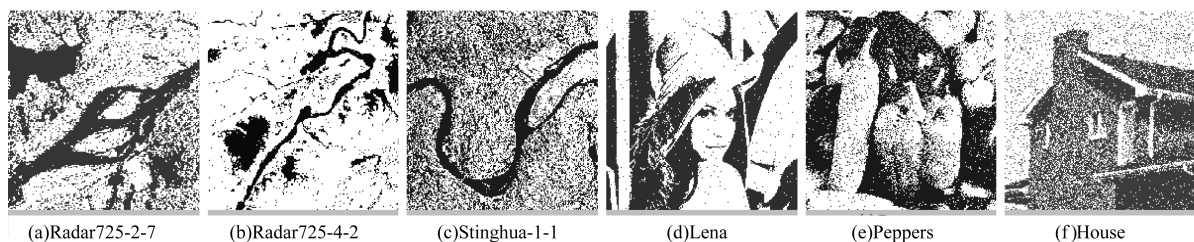


图 4 模糊聚类法分割结果

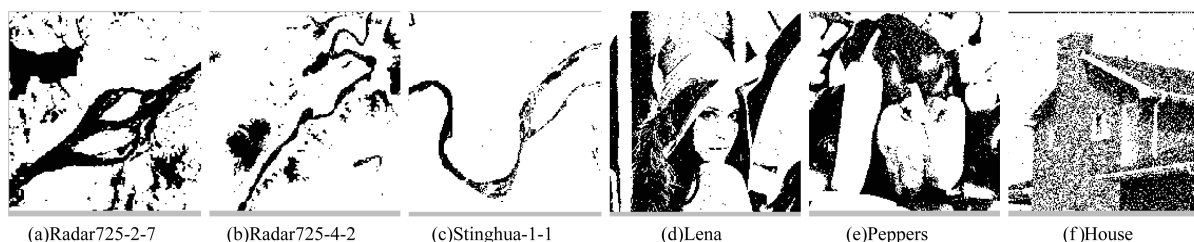


图 5 二维最大熵法分割结果



图 6 鲁棒性 Otsu 法分割结果

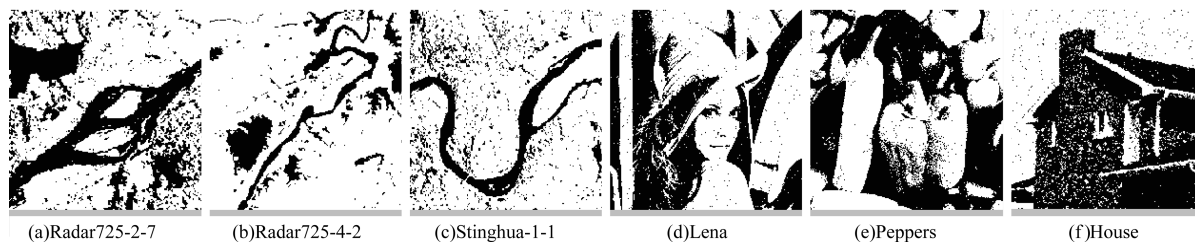


图 7 本文方法分割结果

4 结束语

传统三维最大熵法对图像进行分割时效率较低,为此,本文提出一种基于等价三维熵与 WOA 的图像分割方法。该方法利用等价三维熵公式和 WOA 算法求解最佳阈值,避免了耗时的对数运算与穷举搜索。实验结果表明,与传统三维最大熵法、模糊聚类法和鲁棒性 Otsu 法等相比,该方法准确性较高、抗噪性较强,在 SAR 图像和噪声图像分割方面表现出良好的性能。在实际应用中,算法的抗噪能力与保留图像细节的能力往往是相互矛盾的,对两者进行兼顾与折中将是下一步的研究方向。

参考文献

- [1] 肖乐意,欧阳红林,范朝冬.基于记忆分子动理论优化算法的多目标截面投影 Otsu 图像分割[J].电子与信息学报,2018,40(1):189-199.
- [2] KRISHNAN K B, RANGA S R, GUPTHA N. A survey on different edge detection techniques for image segmentation[J]. Indian Journal of Science and Technology, 2017, 10(4):1-8.
- [3] BAËZAOUÏ A, BARHOUMI W, AHMED A, et al. Semi-automated segmentation of single and multiple tumors in liver CT images using entropy-based fuzzy region growing[J]. IRBM, 2017, 38(2):98-108.
- [4] 申铨京,刘翔,陈海鹏.基于多阈值 Otsu 准则的阈值分割快速计算[J].电子与信息学报,2017,39(1):144-149.
- [5] 王莹莹,何苹,魏彤,等.二维信息熵的红外图像分割算法[J].空军工程大学学报(自然科学版),2015,16(1):77-80.
- [6] ABUTALEB A S. Automatic threshold of gray level pictures using two dimension entropy [J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1989, 47(1):22-32.
- [7] DHIEB M, MASMOUDI S, MESSAOUD M B, et al. 2-D entropy image segmentation on thresholding based on particle swarm optimization(PSO)[C]//Proceedings of International Conference on Advanced Technologies for Signal and Image Processing. Washington D. C., USA; IEEE Press, 2014:143-147.
- [8] 吴一全,朱丽,吴诗娅.基于二维 Arimoto 灰度熵的图像阈值分割快速迭代算法[J].华南理工大学学报(自然科学版),2016,44(5):48-57.
- [9] LEI X, FU A. Two-dimensional maximum entropy image segmentation method based on quantum-behaved particle swarm optimization algorithm [C]//Proceedings of International Conference on Natural Computation. Washington D. C., USA; IEEE Press, 2016:692-696.
- [10] 雷博,范九伦.灰度图像交叉熵阈值法的三维推广[J].控制与决策,2016,31(4):740-744.
- [11] 刘金,余志斌,金炜东.三维最小误差阈值法及其快速递推算法[J].电子与信息学报,2013,35(9):2073-2080.
- [12] WANG J, ZHONG H, LAI X, et al. Distributed real-time demand response based on Lagrangian multiplier optimal selection approach [J]. Applied Energy, 2017, 190:949-959.
- [13] 范九伦,赵凤,张雪峰.三维 Otsu 阈值分割方法的递推算法[J].电子学报,2007,35(7):1398-1402.
- [14] KUMAR V, KUMAR D. An astrophysics-inspired grey wolf algorithm for numerical optimization and its application to engineering design problems[J]. Advances in Engineering Software, 2017, 112:231-254.
- [15] JIANG Q Y, WANG L, LIN Y Y, et al. An efficient multi-objective artificial raindrop algorithm and its application to dynamic optimization problems in chemical processes[J]. Applied Soft Computing, 2017, 58:354-377.
- [16] 崔东文.鲸鱼优化算法在水库优化调度中的应用[J].水利水电科技进展,2017,37(3):72-76.
- [17] MIRJALILI S, LEWIS A. The whale optimization algorithm[J]. Advances in Engineering Software, 2016, 95:51-67.
- [18] 张永,陈锋.一种改进的鲸鱼优化算法[J].计算机工程,2018,44(3):208-213,219.
- [19] 潘宏亮,郭凯文,刘丽伟,等.脑磁共振图像中改进的模糊聚类分割方法研究[J].光学精密工程,2017,25(10):259-265.
- [20] SHA C S, HOU J, CUI H X. A robust 2D Otsu's thresholding method in image segmentation [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2016, 41(11):339-351.
- [21] 张新明,孙印杰,郑延斌.二维直方图准分的 Otsu 图像分割及其快速实现[J].电子学报,2011,39(8):1778-1784.

编辑 吴云芳