

## 基于改进非局部均值的分数阶全变分算法

封晨波, 覃亚丽, 陈 辉, 常丽萍, 薛林林

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

**摘 要:** 传统全变分算法在变分过程中多数会受到阶梯效应的影响, 导致重构图像出现纹理缺失和过平滑。为此, 提出一种基于改进非局部均值的重构算法。通过引入分数阶梯度模型保留图像纹理信息, 利用非局部均值滤波法更新拉格朗日梯度算子, 从而降低计算复杂度。实验结果表明, 与传统 TVAL3 算法相比, 该算法能够有效减少运行时间, 具有较好的重构性能。

**关键词:** 压缩感知; 分数阶微分; 全变分; 非局部均值; 阶梯效应

**中文引用格式:** 封晨波, 覃亚丽, 陈辉, 等. 基于改进非局部均值的分数阶全变分算法[J]. 计算机工程, 2019, 45(4): 241-247.

**英文引用格式:** FENG Chenbo, QIN Yali, CHEN Hui, et al. Fractional total variation algorithm based on improved non-local means[J]. Computer Engineering, 2019, 45(4): 241-247.

## Fractional Total Variation Algorithm Based on Improved Non-local Means

FENG Chenbo, QIN Yali, CHEN Hui, CHANG Liping, XUE Linlin

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

**[Abstract]** The traditional total variation algorithm is mostly affected by the staircase effect in the variation process, so it causes texture loss and over-smoothing in the reconstructed image. Therefore, a reconstruction algorithm based on improved non-local means is proposed. The image texture information is preserved by introducing a fractional step model, and the Lagrangian gradient operator is updated by the non-local means filtering method, thereby reducing the computational complexity. Experimental results show that compared with the traditional TVAL3 algorithm, this algorithm can effectively reduce the running time and has better reconstruction performance.

**[Key words]** compressive sensing; fractional differential; total variation; non-local means; staircase effect

**DOI:** 10.19678/j.issn.1000-3428.0049463

### 0 概述

信号采样遵循奈奎斯特定理, 然而由于计算机资源和通信系统中传输带宽的限制, 在实际工程应用中, 采样后的图像需进行压缩处理, 且压缩后的图像仅保留部分信息, 因此, 经过奈奎斯特采样的信号存在大量冗余信息。压缩感知采样方法考虑信号固有的稀疏特性<sup>[1-3]</sup>, 通过线性映射得到信号的伪随机采样值, 以远低于奈奎斯特采样定理要求的采样点完成对信号的恢复重建。

为求解压缩感知数学模型, 文献[4-5]提出凸优化算法模型。经典的凸优化算法有基追踪算法<sup>[6]</sup>、梯度投影算法<sup>[7]</sup>、迭代阈值算法<sup>[8]</sup>、全变分算法<sup>[9]</sup>等。其中, 全变分算法由于具有保留图像边界的特性, 常被用于处理二维图像, 但其在变分分解过程

中, 结构分量容易受到严重的阶梯现象影响, 使重构图像出现纹理结构缺失和过平滑的问题。文献[10]提出了增广拉格朗日交替方向算法, 该算法虽然有效保留了图像的边缘信息, 但其重建图像存在明显的细节缺失。文献[11]将非局部均值滤波算子作为正则项, 通过权值平均方法有效减少了恢复误差, 但该模型计算相对复杂。文献[12]基于变分模型, 在低复杂度的情况下提高了块压缩感知的重构精度。

本文在文献[13-14]基础上, 结合分数阶与全变分模型的优点, 提出一种基于改进非局部均值算子的分数阶全变分算法。通过交替方向乘子法<sup>[15]</sup>对目标函数进行子问题划分求解, 以提高重构精度, 并使用非局部均值滤波<sup>[16]</sup>法更新拉格朗日梯度算子, 解决全变分算法中重构精度与运行时间之间的权衡问题。

**基金项目:** 国家自然科学基金(61675184, 61405178); 浙江省自然科学基金(LY18F010023)。

**作者简介:** 封晨波(1993—), 女, 硕士研究生, 主研方向为图像处理、光场成像; 覃亚丽, 教授; 陈 辉, 硕士研究生; 常丽萍, 副教授; 薛林林, 讲师。

**收稿日期:** 2017-11-28    **修回日期:** 2018-03-08    **E-mail:** fengcblynn@163.com

### 1 分数阶微分

根据微积分理论,整数阶微分已成为描述经典物理以及相关学科理论的重要数学工具。虽然分数阶微分可以看作是整数阶微分的延伸,但其在时域表达与物理意义上均未统一定义<sup>[17-19]</sup>。在数学领域中,常用的分数阶微分定义有 G-L (Grumwald-Letnikov) 微分、R-L 微分、Caputo 微分等<sup>[20]</sup>。其中,R-L 微分和 Caputo 微分可被视为 G-L 微分定义的改进,因此,G-L 微分具有更广泛的适用性与普遍性。

#### 1.1 G-L 分数阶微分

G-L 分数阶微分可表示为:

$${}_a^G D_t^\nu f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^{\lceil \frac{t-a}{h} \rceil} (-1)^k \times C_k^\nu \times f(t-kh) \quad (1)$$

其中,  ${}_a^G D_t^\nu$  左上标表示分数阶微分的定义类型,  $\nu$  表示函数的微分次数,  $t$  和  $a$  分别表示自变量取值范围的上、下边界,  $h$  为微分步长,  $\lceil \cdot \rceil$  表示取整运算,  $C_k^\nu$  为 Pascal 定理下的二项式系数表达式, 有:

$$C_k^\nu = \binom{\nu}{k} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu-k+1)} \quad (2)$$

$\Gamma(\nu)$  为 Gamma 函数, 表示为:

$$\Gamma(\nu) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx = (\nu-1)!, & \nu > 0 \\ \nu^{-1} \Gamma(\nu+1), & \nu < 0 \end{cases} \quad (3)$$

对式(1)以  $h=1$  的步长进行等间距差分运算, 当  $\nu$  固定时, 随着  $k$  的增加, 二项式系数  $C_k^\nu$  将快速趋近于 0, 因此前  $k$  项的  $\nu$  阶微分差分式可近似为:

$$D^\nu f(x) \approx f(x) + (-\nu)f(x-1) + \frac{(-\nu)(-\nu+1)}{2} \cdot f(x-2) + \dots + \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(K+1)\Gamma(\nu-K+1)} \cdot f(x-K) + \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k C_k^\nu f(x-k) \quad (4)$$

#### 1.2 分数阶微分对信号的影响

根据信号处理基本理论,任意平方可积的能量信号  $f(x) \in L^2(R)$  的  $\nu$  阶分数阶微分可写为  $D^\nu f(x)$ , 由分数阶傅里叶变化性质可得:

$$F(w) = \int f(x) e^{-iw x} dx \quad (5)$$

$$D^\nu f(x) \xrightarrow{FT} (Df)^\nu(w) = (iw)^\nu F(w) = d^\nu(w) F(w) \quad (6)$$

其中:

$$\begin{cases} d^\nu(w) = (iw)^\nu = \alpha^\nu(w) e^{i\theta^\nu(w)} \\ \alpha^\nu(w) = |w|^\nu, \theta^\nu(w) = \frac{\nu\pi}{2} \text{sgn}(w) \end{cases} \quad (7)$$

因此,分数阶梯度  $D^\nu$  在不同阶次下  $\nu(1 \leq \nu \leq 2)$  的幅频特性曲线如图 1 所示,具体分析如下:

1) 当分数阶阶次  $\nu=1$  时,分数阶微分对信号幅度无任何作用,当分数阶阶次  $\nu=2$  时,虽分数阶算

子对信号高频(频率大于 1)部分的幅度有明显的提升作用,但对信号低频部分(频率小于 1)亦有较大的衰减作用。

2) 当分数阶阶次  $1 < \nu < 2$  时,不同阶次的分数阶微分算子对信号的加强(削弱)能力位于 1 阶与 2 阶分数阶微分之间,且随着阶次的增加,分数阶微分算子对信号的作用程度呈非线性增长。

3) 在信号的高频部分,1-2 阶分数阶微分算子对信号的提升幅度虽不及 2 阶微分算子,但与 1 阶微分相比,信号仍得到一定的增强。在信号的低频部分,1-2 阶分数阶微分算子有效改善了 2 阶微分下信号衰减严重的问题,不仅提高了高频信息,而且没有使中低频信息过分衰减,从而改善了图像的纹理和细节信息,解决了由于 TVAL3 算法阶梯效应导致的图像纹理缺失和过平滑问题。

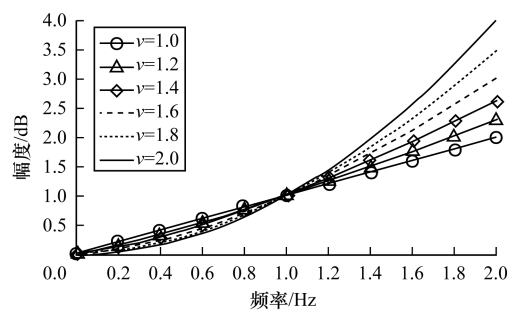


图 1 分数阶算子下梯度的幅频特性曲线

综上所述,分数阶微分具有弱导数性,在物理上可理解为广义的调幅调相,以此构造全变分模型。

#### 1.3 分数阶全变分模型

在空间上,若二维连续图像信号  $Z=f(x,y)$  在  $M(x,y)$  存在连续  $\nu$  阶偏导,根据上述 G-L 分数阶微分性质,信号  $f(x,y)$  在点  $M$  沿任意  $l$  方向的  $\nu$  阶方向导数和梯度表达式为:

$$\frac{\partial^\nu f}{\partial l^\nu} = \left( \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right)^\nu f(x,y) \quad (8)$$

$$\text{grad}^\nu f(x,y) = \frac{\partial^\nu f}{\partial x^\nu} \mathbf{i} + \frac{\partial^\nu f}{\partial y^\nu} \mathbf{j} \quad (9)$$

其中:

$$\frac{\partial^\nu f(x,y)}{\partial x^\nu} = \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k C_k^\nu f(x-k,y) \quad (10)$$

$$\frac{\partial^\nu f(x,y)}{\partial y^\nu} = \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k C_k^\nu f(x,y-k) \quad (11)$$

若对二维图像信号进行采样量化,可得到用于图像处理的二维离散数字图像。数字化后的图像由一系列不同亮度值的灰度块组成,图像的梯度表示像素点间灰度变化程度。根据能量泛函最小化定理,图像  $X$  的全变分模型可理解为二维离散信号梯度的总和,即:

$$\| \nabla X \|_{TV} = \sqrt{(D_x X)^2 + (D_y X)^2} = \sum_{i,j} \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (x_{i,j+1} - x_{i,j})^2} \quad (12)$$

在图像全变分模型式(12)中引入分数阶微分算子, 所得到的新模型可以表示为:

$$\| \nabla^v \mathbf{X} \|_{\text{FOTV}} = \sqrt{(\mathbf{D}_x^v \mathbf{X})^2 + (\mathbf{D}_y^v \mathbf{X})^2} \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{D}_x^v, \mathbf{D}_y^v$  分别为水平方向和垂直方向的梯度分量, 可表示为:

$$(\mathbf{D}_x^v \mathbf{X})_{i,j} = (-1)^k C_k^v \mathbf{X}_{i-k,j} \quad (14)$$

$$(\mathbf{D}_y^v \mathbf{X})_{i,j} = (-1)^k C_k^v \mathbf{X}_{i,j-k} \quad (15)$$

## 2 优化算法

### 2.1 改进分数阶 TVAL3 算法

根据文献[21], 在图像信号中, 噪声和结构信息均属于高频成分, 且受噪声影响越大的图像, 具有相对较大的变分值, 因此, 基于最小全变分的压缩感知重构模型可描述为:

$$\min_x \| \mathbf{D}_i \mathbf{x} \|_{\text{TV}} \text{ s. t. } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (16)$$

与其他算法相比, 该方法在保留图像轮廓信息上具有一定优越性, 但由于阶梯效应, 重构图像的纹理信息常被过平滑处理。针对该问题, 通过引入分数阶梯度模型约束空间, 在增强边缘轮廓能量幅度的同时, 达到保留纹理细节的效果。具体优化方法如下:

引入松弛变量  $\mathbf{w}_i$  计算线性不可分式(16), 有:

$$\min_x \| \mathbf{w}_i \|_{\text{TV}} \text{ s. t. } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}, \mathbf{D}_i^v \mathbf{x} = \mathbf{w}_i \quad (17)$$

利用增强拉格朗日算法, 将带约束项的式(17)转换为不带约束的目标函数。

$$\begin{aligned} L_A(\mathbf{w}_i, \mathbf{x}) = & \sum_i \left( \| \mathbf{w}_i \| - \gamma_i^T (\mathbf{D}_i^v \mathbf{x} - \mathbf{w}_i) + \right. \\ & \left. \frac{\beta_i}{2} \| \mathbf{D}_i^v \mathbf{x} - \mathbf{w}_i \|_2^2 - \lambda^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{y}) + \right. \\ & \left. \frac{\mu}{2} \| \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_2^2 \right) \quad (18) \end{aligned}$$

其中,  $\gamma_i$  和  $\lambda$  为增广拉格朗日算子, 分别由梯度信息保真项  $\mathbf{D}_i^v \mathbf{x} - \mathbf{w}_i$  与测量值保真项  $\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{y}$  进行更新,  $\beta_i$  和  $\mu$  为惩罚因子, 将该方法称为分数阶 TV (TV + fradi) 算法, 并作为本文实验的对比算法。

### 2.2 改进的非局部均值滤波法

非局部均值滤波法是一种利用噪声之间非相关性, 以图像块之间的权系数为依据的滤波方法, 其核心问题在于如何确定加权核函数。当非局部均值滤波权系数越大时, 2 个图像块之间相似度越高。以像素  $i$  与像素  $j$  为中心的图像块为例<sup>[22]</sup>, 其权重  $\mathbf{w}_{ij}$  可表示为:

$$\mathbf{W} = \mathbf{w}_{ij} = \frac{\exp\left(-\frac{\| \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i \|_2^2}{s^2}\right)}{c_i} \quad (19)$$

其中,  $\| \cdot \|_2^2$  为加权欧氏距离,  $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$  是以  $i, j$  像素点为中心的邻域图像块,  $s$  是高斯内核控制因子,  $c_i$

是归一化常数。

由于非局部均值滤波算法具有较强的约束能力<sup>[22]</sup>, 常被作为正则项优化空间, 以保留重建图像的边缘信息, 如经典 TV + nola 算法<sup>[11]</sup>, 但是该算法在求解过程中需分离多个子方程, 运算复杂度较高。为解决这一问题, 利用拉格朗日算子  $\gamma_i$  作为先验知识, 包含梯度图像更新过程中的所有信息, 通过非局部均值滤波更新算子, 在不增加计算复杂度的情况下, 有效去除传统更新方法的梯度误差, 改进的更新方法为:

$$\gamma_i^k = \gamma_i^{k-1} - \beta_i (\mathbf{D}_i^v \mathbf{x} - \mathbf{w}_i) \quad (20)$$

$$\hat{\gamma}_i^k = \mathbf{W} \gamma_i^k \quad (21)$$

$$\lambda^k = \lambda^{k-1} - \mu (\mathbf{A} \mathbf{x}^k - \mathbf{y}) \quad (22)$$

### 2.3 交替方向乘子算法

式(18)是可分离的凸函数, 但由于该函数具有不可微的特性, 使其在传统方法下求解十分困难。交替方向乘子法 (Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM) 作为解决可分离凸优化问题最有效的方法之一<sup>[23]</sup>, 充分利用了目标函数的可分离性, 将原问题分解为若干个交替的极小值子问题, 且所有分离后的子问题都能得到相应的微分显式精确解。因此, 利用 ADMM 方法对式(18)进行分离, 分离后的目标函数将转为 2 个关于  $\mathbf{w}_i$  与  $\mathbf{x}$  的极小化子问题, 依次迭代, 可求得相应闭式解。 $\mathbf{w}_i$  子问题可描述为:

$$\min_{\mathbf{w}_i} \sum_i \left( \| \mathbf{w}_i \| - \gamma_i^T (\mathbf{D}_i^v \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{w}_i) + \frac{\beta_i}{2} \| \mathbf{D}_i^v \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{w}_i \|_2^2 \right) \quad (23)$$

根据 2D shrinkage-like 定理<sup>[24]</sup>, 对子问题式(23)进一步估计求解得:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^{(k+1)} = & \max \left\{ \left| \mathbf{D}_i^v \mathbf{x}^{(k)} - \frac{\gamma_i}{\beta_i} \right| - \frac{1}{\beta_i}, 0 \right\} \times \\ & \text{sgn} \left( \mathbf{D}_i^v \mathbf{x}^{(k)} - \frac{\gamma_i}{\beta_i} \right) = \\ & \max \left\{ \left| \mathbf{D}_i^v \mathbf{x}^{(k)} - \frac{\gamma_i}{\beta_i} \right| - \frac{1}{\beta_i}, 0 \right\} \odot \\ & \left( \mathbf{D}_i^v \mathbf{x}^{(k)} - \frac{\gamma_i}{\beta_i} \right) \\ & \left\| \mathbf{D}_i^v \mathbf{x}^{(k)} - \frac{\gamma_i}{\beta_i} \right\|_2 \quad (24) \end{aligned}$$

其中,  $\| \cdot \|_2$  为  $l_2$  范数,  $\odot$  表示矩阵的点积运算。

$\mathbf{w}_i^{(k+1)}$  子问题可近似为:

$$\begin{aligned} \min_x Q^{(k)}(\mathbf{x}) = & \sum_i \left( -\gamma_i^T (\mathbf{D}_i^v \mathbf{x} - \mathbf{w}_i^{(k+1)}) + \right. \\ & \left. \frac{\beta_i}{2} \| \mathbf{D}_i^v \mathbf{x} - \mathbf{w}_i^{(k+1)} \|_2^2 \right) - \\ & \lambda^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\mu}{2} \| \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_2^2 \quad (25) \end{aligned}$$

考虑到 Moore-Penrose 广义逆求解法存在计算代价过高的问题,本文使用最快梯度下降法对  $x$  递推求解,有:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k \tag{26}$$

$$d_k(x) = \sum_i (\beta_i (D_i^v)^T (-D_i^v x - w_i^{(k+1)}) - (D_i^v)^T \gamma_i) + \mu A^T (Ax - y) - A^T \lambda \tag{27}$$

其中,  $\alpha_k$  表示 Barzilai-Borwein 步长因子,由迭代当前点以及前一点的信息决定,  $d_k$  表示二次式(25)的梯度,所得到的全局解  $x$  即为压缩感知的重建图像。本文算法迭代过程伪代码描述如下:

**算法** 交替方向乘子算法

输入 测量值  $y$ , 测量矩阵  $A$ , 相关参数  $\beta, \mu, v, \varepsilon$

输出 重构图像  $x$

1. 初始化:  $\gamma_i^{(0)} \leftarrow 0, \lambda_i^{(0)} \leftarrow 0, w_i^{(0)} \leftarrow 0, y_i^{(0)} \leftarrow 0$
2. While 目标函数式(17)未达到最优解
3. While  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_2 > \varepsilon$
4. 利用式(23)解决  $w_i$  子问题
5. 利用式(25)计算  $x$  子问题  $zQ$
6. End
7. 利用式(19)计算权重  $W$
8. 利用式(21)、式(22)更新拉格朗日梯度算子
9. End

### 3 实验结果与分析

本节通过实验对改进算法的有效性和优越性进行定量与定性分析,选择南加利福尼亚大学图像数据库中 15 幅尺寸为 256 像素  $\times$  256 像素的标准图像进行测试。本文将基于整个数据库对算法平均性能指标进行分析,并给出部分纹理信息较丰富,且具有代表性图像的分析结果,实验原图如图 2 所示。



图 2 实验原始图像

在实验中,测量矩阵为高斯随机矩阵,正则化参数根据文献[11]的实验结果进行选择( $\mu = 256, \beta_m = 32, \rho = 1, \theta = 2, \alpha = 1$ ),为获得最优峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR),以 0.1 为步长,对分数阶阶次  $v(1 < v < 2)$  进行多次实验,最终得到最优分数阶阶次  $v = 1.2$ ,其余参数根据经验值选择,其设置如下:搜索窗尺寸为  $13 \times 13$ ,临近窗为  $7 \times 7$ ,高斯核参数  $s$  为 0.1。本文实验 PC 性能为 Intel(R) Core(TM) i5-2520M CPU@ 2.5 Hz, RAM 为 4 GB,仿真软件使用 Matlab R2009a。

#### 3.1 峰值信噪比

本文使用峰值信噪比来衡量图像重构的性能,其定义如下:

$$Err = z - f \tag{28}$$

$$MSE = \frac{1}{m \times n} \sum_i \sum_j (z_{i,j} - f_{i,j})^2 \tag{29}$$

$$PSNR = 10 \lg \left( \frac{MAX^2}{MSE} \right) \tag{30}$$

其中,  $Err$  为原图像与处理图像之间的误差信息,  $MSE$  为原图像与处理图像的均方误差(Mean Squared Error, MSE),  $m \times n$  表示图像分辨率,  $z$  为原始图像,  $f$  为待评价图像,  $MAX$  表示图像像素点强度的最大比特值。本文实验中的原始图像与重构图像均为灰度图像,即每个像素点具有 8 位颜色深度,因此  $MAX = 2^8 - 1 = 255$ 。由式(30)可知,峰值信噪比越大(即均方误差越小),图像重建效果越好。

在实验中,分别使用 TVAL3 算法、基于分数阶微分的 TV(TV + fradi)算法、基于改进块模型的全变分重构(TV + BCS)算法、基于非局部均值的 TV 正则化(TV + nloc)算法与本文算法进行对比实验,得到所有测试图像在不同采样率下的重建效果,采样形式即测量矩阵,测量矩阵为高斯随机矩阵。不同算法基于标准图像数据库的重构平均性能指标如图 3 所示,4 幅标准测试图像重构后的峰值信噪比结果如表 1 所示。

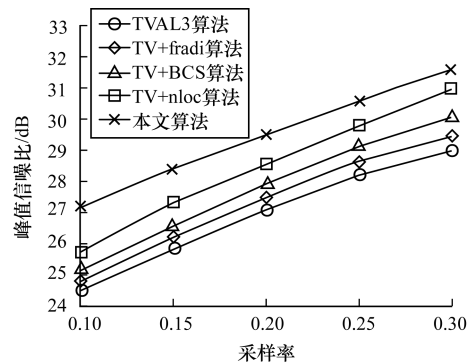


图 3 各算法在不同采样率下峰值信噪比对比结果

表 1 改进算法与 TV 算法重构性能对比

图像	采样率	PSNR/dB				
		TVAL3 算法	TV + fradi 算法	TV + BCS 算法	TV + nloc 算法	本文算法
Lena	0.10	24.17	24.76	25.03	25.31	26.71
	0.15	25.68	26.14	26.48	26.81	28.20
	0.20	27.15	27.67	27.99	28.49	29.55
	0.25	28.70	29.18	29.48	30.19	31.03
	0.30	30.35	30.85	31.04	32.07	32.58
Babara	0.10	22.42	22.88	23.24	23.93	25.97
	0.15	23.31	23.87	24.19	25.30	26.84
	0.20	24.32	24.98	25.28	26.43	27.68
	0.25	25.40	26.01	26.34	27.58	28.66
	0.30	26.54	27.11	27.46	28.78	29.69
Boats	0.10	23.37	23.72	24.08	24.31	25.59
	0.15	24.99	25.38	25.61	26.04	27.35
	0.20	26.62	27.07	27.34	27.69	28.81
	0.25	28.27	28.69	28.92	29.39	30.37
Monarch	0.10	24.59	24.94	25.21	25.34	26.79
	0.15	25.78	26.10	26.38	26.77	27.69
	0.20	27.03	27.39	27.71	28.11	28.82
	0.25	28.39	28.74	29.03	29.53	30.07
	0.30	29.71	30.13	30.44	30.82	31.28

从图 3 可以看出,本文算法在各个采样率下均具有优于其他算法的平均性能指标。TV + fradi 算法、TV + BCS 算法、TV + nloc 算法、本文算法与传统 TVAL3 算法相比最大平均峰值信噪比提高值分别为 0.465 dB、1.01 dB、1.55 dB、2.66 dB。

从表 1 可以看出,在所有采样率下,本文算法对重构图像的峰值信噪比均有所提高。TV + fradi 算法、TV + BCS 算法、TV + nloc 算法、本文算法与传统 TVAL3 算法相比最大峰值信噪比提高值分别为 0.67 dB、0.96 dB、2.24 dB、3.55 dB,平均峰值信噪比提高值分别为 0.47 dB、0.76 dB、1.36 dB、2.44 dB。在采样率为 0.10 的 Lena、Barbara 和 Monarch 图像和采样率为 0.15 的 Boats 图像中,本文算法峰值信噪比提升幅度最大,分别为 2.54 dB、3.55 dB、2.36 dB 和 2.2 dB,其主要原因是利用非局部均值滤波法更新拉格朗日算子。在采样率较小时,各算子中包含较多梯度误差信息,因此分数阶微分对梯度信息高频结构部分与中频纹理部分的增强作用会影响重构图像精度。

3.2 结构相似度

表 2 所示为 4 幅标准测试图像在采样率为 0.30 时的结构相似度 (Structural Similarity Index, SSIM),该指标从亮度、对比度、归一化结构的角度的对比了原始图像与重构图像之间相似程度,其具体表达式为:

$$SSIM(X, \hat{X}) = \frac{(2\mu_x \mu_{\hat{x}} + C_1)(2\sigma_{x\hat{x}} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_{\hat{x}}^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_{\hat{x}}^2 + C_2)} \quad (31)$$

其中,  $\mu_x$  为原图像灰度均值,  $\mu_{\hat{x}}$  为重构图像灰度均值,  $\sigma_x$  为原图像方差,  $\sigma_{\hat{x}}$  为重构图像方差,  $\sigma_{x\hat{x}}$  为协方

差,  $C_1$ 、 $C_2$  为定值常数,其中,  $C_1 = 0.01^2$ ,  $C_2 = 0.03^2$ 。

表 2 在采样率为 0.30 时 5 种算法结构相似度对比结果

算法	Lena	Barbara	Boats	Monarch	平均值
TVAL3 算法	0.851 9	0.832 2	0.865 0	0.873 5	0.855 6
TV + fradi 算法	0.875 9	0.845 2	0.877 6	0.889 4	0.872 0
TV + BCS 算法	0.882 8	0.869 4	0.899 2	0.903 4	0.888 7
TV + nloc 算法	0.913 3	0.906 5	0.932 6	0.932 6	0.921 2
本文算法	0.946 4	0.935 3	0.965 9	0.952 9	0.950 1

从表 2 可以看出,对任意测试图像,本文算法与其他算法相比 SSIM 值更接近 1。TV + fradi 算法、TV + BCS 算法、TV + nloc 算法、本文算法与传统 TVAL3 算法相比,最大结构相似度提高值分别为 0.024、0.037 2、0.074 3、0.103 1,平均结构相似度提高值分别 0.016 4、0.033 1、0.065 6、0.094 5。

3.3 算法运行时间

为验证本文算法具有较低的计算复杂度,以 Barbara 图像为例,对比各算法在所有采样率下的算法运行时间,其结果如图 4 所示。

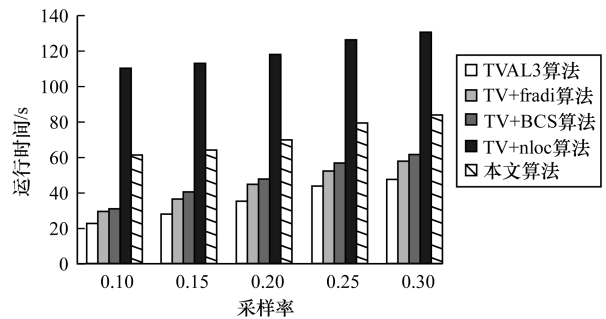


图 4 各算法在不同采样率下运行时间对比结果

从图 4 可以看出,图像重建所需时间随着采样率的增加而增加。TVAL3 算法、TV + BCS 算法与 TV + fradi 算法未对目标函数进行正则化优化,因此在计算过程中复杂度较低,所需运行时间较少,但重建效果较差。相反 TV + nloc 算法与本文算法均采用非局部均值滤波作为目标函数的约束项,因比重构效果较好。在 TV + nloc 算法中,非局部均值滤波作为正则项直接参与目标函数的计算,根据 ADMM 理论,该算法需解决 4 个分离子问题,其运行代价较大。本文算法将非局部均值滤波运用于算子的更新部分,在求解过程中只需解决 2 个极小化子问题,降低了重构时间,但与 TVAL3 算法、TV + fradi 算法和 TV + BCS 算法相比,该算法运行时间仍然较长。

3.4 结果对比

本文选择 256 像素 × 256 像素的 Barbara、Boats 图像作为原始图像,在采样率为 0.30 的情况下,对图像细节信息复杂的部分进行放大对比(实验选择 Barbara 图像脸部及 Boats 图像桅杆部分),并通过观察重构图像与原始图像放大部分之间的误差信息图,进一步分析本文算法对细节保留的优势。

Barbara 图像的重建与误差对比结果如图 5、图 6 所示,Boats 图像的重建与误差对比结果如图 7、图 8 所示。



图5 不同算法在 Barbara 图像中峰值信噪比对比

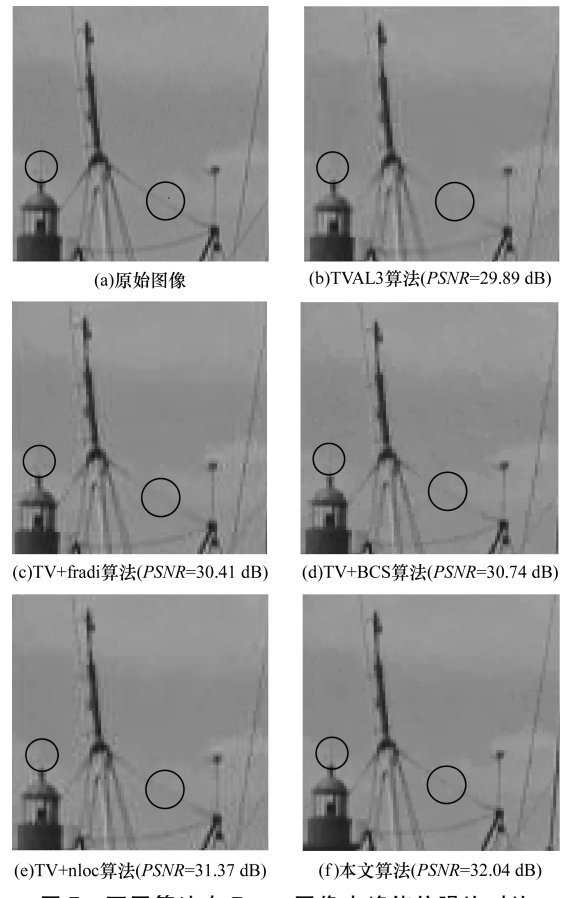


图7 不同算法在 Boats 图像中峰值信噪比对比

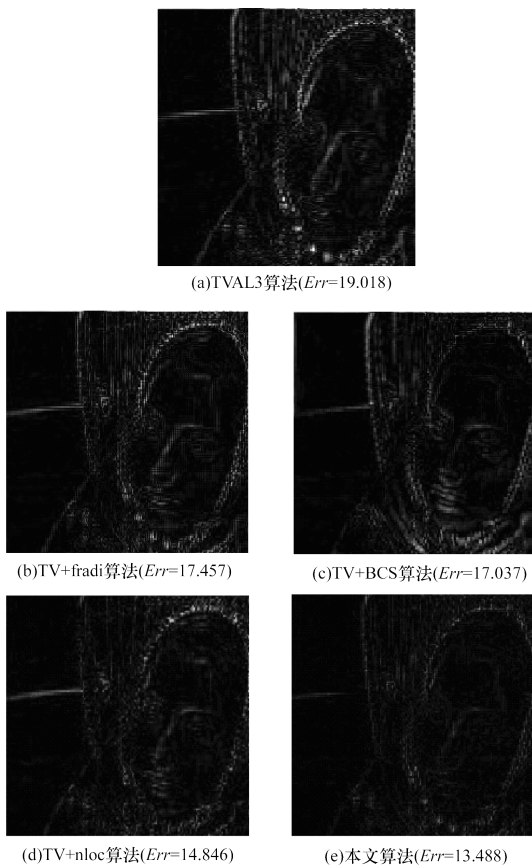


图6 不同算法在 Barbara 图像中误差对比

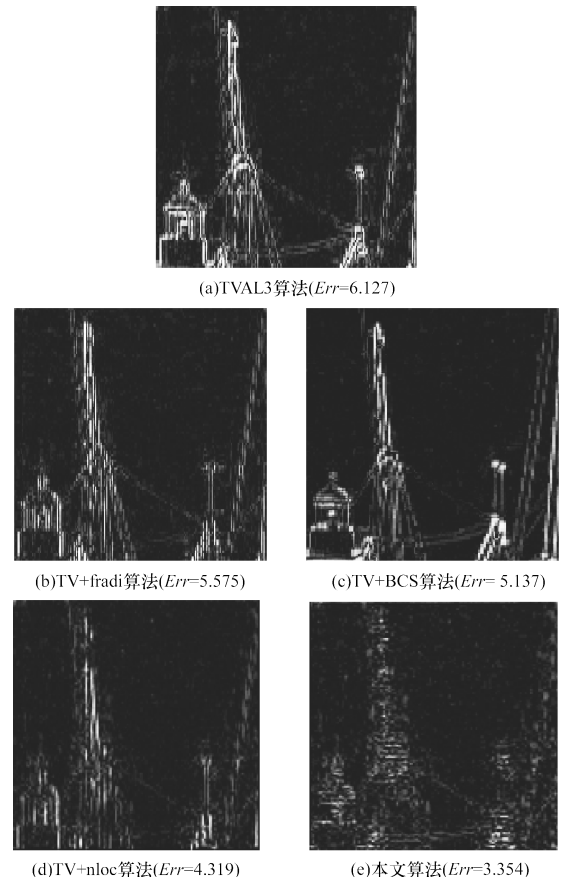


图8 不同算法在 Boats 图像中误差对比

从图5、图7可以看出,本文算法重构的图像保留了较多的图像结构纹理信息,尤其在Barara和Boats图片中的圆圈部分,本文算法对人物眼睛部分和塔尖部分细节的保留明显优于其他算法。从图6和图8可以看出,本文算法重构图像与原图之间存在的误差明显小于其他算法,因此重建后的图像更加清晰。由此证明,本文算法解决了全变分算法中图像重构精度与重构时间之间的权衡问题,在较小的运算代价下,具有较高的峰值信噪比,且保留了图像复杂纹理部分(如Barbara图像的脸部,Boats图像桅杆部分),因此本文算法整体性能优于其他算法。

#### 4 结束语

本文通过结合分数阶与全变分模型的优点,提出一种基于改进非局部均值算子的分数阶全变分重构算法。利用交替方向乘子算法给出算法的迭代过程,使用非局部均值滤波更新梯度算子,从而降低计算复杂度。实验结果表明,本文算法相对TVAL3算法保留较多的图像结构纹理和边缘信息,且重构误差较小,能够在重构精度和运行时间之间取得均衡。

#### 参考文献

- [1] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] CANDÈS E J. Compressive sampling [EB/OL]. [2017-10-20]. <http://statweb.stanford.edu/~candes/papers/CompressiveSampling.pdf>.
- [3] CANDÈS E J, WAKIN M B. An introduction to compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21-30.
- [4] DONOHO D L, TSAIG Y. Fast solution of L1-norm minimization problems when the solution may be sparse [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(11): 4789-4812.
- [5] DONOHO D L. For most large underdetermined systems of linear equations the minimal L1-norm solution is also the sparsest solution [EB/OL]. [2017-10-20]. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.20132>.
- [6] LI W, LIU F, JIAO L, et al. A group matching pursuit for image reconstruction [J]. Image Communication, 2016, 49(C): 47-62.
- [7] ZHANG L, ZHOU W. Spectral gradient projection method for solving nonlinear monotone equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 196(2): 478-484.
- [8] RAUHUT H, SCHNEIDER R, STOJANAC Ž. Low rank tensor recovery via iterative hard thresholding [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2017, 523: 220-262.
- [9] SELESNICK I. Total variation denoising via the moreau envelope [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(2): 216-220.
- [10] LI C, YIN W, JIANG H, et al. An efficient augmented Lagrangian method with applications to total variation minimization [J]. Computational Optimization and Applications, 2013, 56(3): 507-530.
- [11] ZHANG J, LIU S, XIONG R, et al. Improved total variation based image compressive sensing recovery by nonlocal regularization [C]//Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Washington D. C., USA: IEEE Press, 2013: 2836-2839.
- [12] 陈建, 苏凯雄, 杨秀芝, 等. 基于变分模型的块压缩感知重构算法 [J]. 通信学报, 2016, 37(1): 100-109.
- [13] ZHANG X, BURGER M, BRESSON X, et al. Bregmanized nonlocal regularization for deconvolution and sparse reconstruction [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2010, 3(3): 253-276.
- [14] DONG W, YANG X, SHI G. Compressive sensing via reweighted TV and nonlocal sparsity regularisation [J]. Electronics Letters, 2013, 49(3): 184-186.
- [15] WARREN R E, OSHER S J. Hyperspectral unmixing by the alternating direction method of multipliers [J]. Inverse Problems and Imaging, 2017, 9(3): 917-933.
- [16] XU S, ZHOU Y, XIANG H, et al. Remote sensing image denoising using patch grouping-based nonlocal means algorithm [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2017, 14(12): 2275-2279.
- [17] 李博, 谢巍. 基于自适应分数阶微积分的图像去噪与增强算法 [J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(1): 185-192.
- [18] ATANGANA A, BALEANU D. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model [EB/OL]. [2017-10-20]. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1602/1602.03408.pdf>.
- [19] TAN J, XIONG J. A harnack inequality for fractional laplace equations with lower order terms [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2011, 31(3): 975-983.
- [20] RAFEIRO H, SAMKO S. Fractional integrals and derivatives: mapping properties [J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2016, 19(3): 580-607.
- [21] MA L, MOISAN L, YU J, et al. A stable method solving the total variation dictionary model with  $L^\infty$  constraints [J]. Inverse Problems and Imaging, 2014, 8(2): 507-535.
- [22] 海涛, 席志红. 基于改进复扩散耦合非局部均值滤波器的图像放大 [J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(5): 1182-1188.
- [23] 张娜, 刘辉, 尚振宏, 等. 改进权重函数的非局部均值图像去噪算法 [J]. 计算机工程, 2016, 42(12): 254-261.
- [24] XIAO Y, YANG J. A fast algorithm for total variation image reconstruction from random projections [J]. Inverse Problems and Imaging, 2017, 6(3): 547-563.

编辑 赵辉