

基于一个水平集函数的多相图像分割方法

赵瑞雪,潘振宽,侯国家,刘存良

(青岛大学 计算机科学技术学院,山东 青岛 266071)

摘要:利用多个特征函数标记不同区域的方法进行图像分割时,需要对多个函数求极值,导致计算量增大。针对该问题,设计一个函数在多层水平集标记的方法,通过求解一个标记函数的极值问题实现对图像不同区域的分割。总结区域标记函数规律,得到多项图像分割模型表达式,将其与变分水平集方法相结合,运用交替方向乘子法加速求解能量泛函极值问题。实验结果表明,该方法能够实现图像多个区域的分割,并且保证分割结果的鲁棒性和计算高效性。

关键词:多相图像分割;区域标记;水平集;变分模型;交替方向乘子法

中文引用格式:赵瑞雪,潘振宽,侯国家,等. 基于一个水平集函数的多相图像分割方法[J]. 计算机工程,2018,44(4): 317-321.

英文引用格式:ZHAO Ruixue, PAN Zhenkuan, HOU Guojia, et al. Multiphase Image Segmentation Method Based on One Level Set Function[J]. Computer Engineering, 2018, 44(4): 317-321.

Multiphase Image Segmentation Method Based on One Level Set Function

ZHAO Ruixue, PAN Zhenkuan, HOU Guojia, LIU Cunliang

(College of Computer Science and Technology, Qingdao University, Qingdao, Shandong 266071, China)

[Abstract] When using multiple feature functions to mark different regions for image segmentation, it is necessary to find extreme values for multiple functions, resulting in the increase in computation. Aiming at this problem, a method of multi-level set marking by one function is designed, and the segmentation of different regions is realized by solving the extremum problem of one marking function. It summarizes law of regional marking function, obtains expressions of multiple image segmentation model, and combines it with the Variational Level Set Method (VLSM). At the same time, it accelerates the solution of the energy functional extremum problem by the Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) acceleration algorithm. Experimental results show that the proposed method can realize the segmentation of multiple regions and ensure the robustness and efficiency of segmentation results.

[Key words] multiphase image segmentation; regional marking; level set; variational model; Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)

DOI:10.3969/j.issn.1000-3428.2018.04.051

0 概述

图像分割指在复杂图像中分割出目标图像,其在图像处理、计算机视觉等领域有着重要的研究价值^[1]。具有拓扑自适应能力的水平集方法能够有效应对多相分割问题的复杂性^[2],是解决图像分割问题的主流方法。变分水平集方法是变分方法和水平集方法的结合,因为其具有集成多种信息和可处理拓扑变化的优点,所以近年来被广泛地应用于多相图像分割的研究领域^[3]。

Vese 和 Chan 结合简化的 Mumford-Shah^[4]模型和水平集方法^[3],建立了用于划分 2 个区域的两相 Chan-Vese 模型^[5],并将其扩展为用于解决分段常值和分段光滑的多相图像分割问题的通用模型。但是,该模型只给出进行区域分割的一般策略,并没有给出进行区域分割的通用公式,如果分割区域很多,就会使能量泛函和相关水平集函数演化方程变得很复杂。

针对上述问题,文献[6-7]提出采用 n 个函数标记 n 个区域的 Potts 模型。为解决函数间的“重叠”

基金项目:国家自然科学基金“曲面上图像处理的非局部变分模型与算法”(61772294);山东省自然科学基金“基于成像物理模型的水下图像增强与复原变分方法研究”(ZR2017PF003)。

作者简介:赵瑞雪(1992—),女,硕士研究生,主研方向为变分图像处理、图像分割;潘振宽,教授、博士;侯国家(通信作者),博士;刘存良,副教授、博士。

收稿日期:2017-09-06 **修回日期:**2017-10-31 **E-mail:**hgjouc@126.com

和“真空”问题,该模型对相关条件进行约束^[8-9]。文献[10-11]提出2种应用于分段常值的多相图像分割模型,其中,一种运用 n 个将标记函数取值为1或-1的水平集函数,另一种运用标记函数取值为离散常值的一个水平集函数,再通过Lagrange多项式差值获得可以划分多个不同区域的基函数,得到以分段常值为基础的变分水平集图像分割模型,该模型也包含对相关条件的约束^[3]。文献[7,12]提出采用 n 个水平集函数表达 $2n$ 个区域的标记函数,实现对多个不同区域的划分。文献[13]则采用一个水平集函数标记 $n(m+1)$ 个区域的多相图像分割模型。但是,以上区域分割策略都要求解多个函数的极值问题,计算过程比较复杂。

本文采用一个连续变化的水平集函数^[14],基于区域竞争策略^[15-16]提出 m 层水平集分割线划分 n 个区域的方法进行区域特征函数表达,从而构建多相图像分割的变分模型。

1 相关研究

本文引入Heaviside函数为水平集标记函数。并且用 $H_\varepsilon(\phi)$ 近似Heaviside函数 $H(\phi)$,即当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,得到 $H_\varepsilon(\phi) \rightarrow H(\phi)$ 。由此,根据文献[4-5]有以下结论:

$$H_\varepsilon(\phi) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \right) \quad (1)$$

$$\delta_\varepsilon(\phi) = H'_\varepsilon(\phi) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \phi^2} \quad (2)$$

基于多相图像分割的区域表达策略,令 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ($n=2,3$)表示有界开集, $f(x):\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 表示在图像区域 Ω 内的图像强度。运用一个分层的水平集函数表达 n 个区域的多相图像分割的变分水平集模型^[15],其传统表达式可以表示为:

$$\begin{aligned} & \min_{u_i, \phi} E(u_i, \phi) \\ & E(u_i, \phi) = \alpha_1 \int_{\Omega} |u_1 - f|^2 H(l_1 - \phi) dx + \\ & \quad \sum_{i=2}^m \int_{\Omega} |u_i - f|^2 \cdot H(\phi - l_{i-1}) H(l_i - \phi) dx + \\ & \quad \alpha_i \int_{\Omega} |u_{m+1} - f|^2 \cdot H(\phi - l_m) dx + \\ & \quad \mu \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} |\nabla H(\phi - l_i)| dx \end{aligned} \quad (3)$$

根据式(3),可以把分段区域求均值的标记函数分为3个部分表达。本文提出区域标记函数的统一化表达式,从而获得多相图像分割的变分模型,其主要思想是使用一个连续函数的多层水平线来划分图像多个不同区域。本文以图1把闭合区域 Ω 分成5个区域的过程为例。

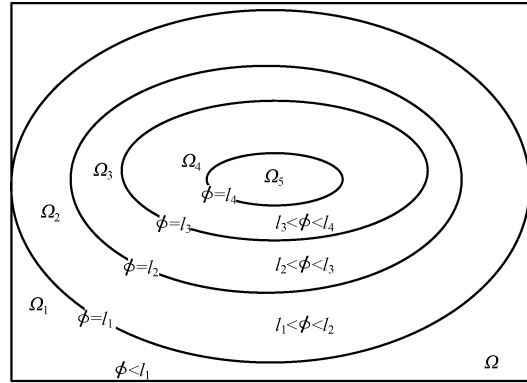


图1 闭合区间划分示例

通过4层水平线来划分一个闭合区间的5个区域。每个区域的标记函数可以通过如下表达式表示:

$$\chi_1(\phi(x)) = H(\phi(x) - l_0) H(l_1 - \phi(x)) \quad (4)$$

$$\chi_2(\phi(x)) = H(\phi(x) - l_1) H(l_2 - \phi(x)) \quad (5)$$

$$\chi_3(\phi(x)) = H(\phi(x) - l_2) H(l_3 - \phi(x)) \quad (6)$$

$$\chi_4(\phi(x)) = H(\phi(x) - l_3) H(l_4 - \phi(x)) \quad (7)$$

$$\chi_5(\phi(x)) = H(\phi(x) - l_4) H(l_5 - \phi(x)) \quad (8)$$

通过对上述表达式的归纳整理,可以得出以下结论:定义水平线 $\{l_0 < l_1 < \dots < l_m\}$,可用一个Lipschitz连续分层(层数为 m)水平集函数 $\phi:\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 划分 n 个区域,即用1个水平集函数表达 n 个不同区域。多相图像分割不同区域的特征函数表达不同,本文首先对 $\phi(x)$ 函数加约束条件 $\phi \in [0, m+1]$,然后提出区域特征函数表达式:

$$\chi_1(\phi(x)) = H(\phi(x) - l_0) H(l_1 - \phi(x)) \quad (9)$$

$$\chi_2(\phi(x)) = H(\phi(x) - l_1) H(l_2 - \phi(x)) \quad (10)$$

⋮

$$\chi_n(\phi(x)) = H(\phi(x) - l_m) H(l_n - \phi(x)) \quad (11)$$

总结以上区域特征函数表达式的规律,得到第 i 个区域的特征函数 χ_i ($i=1,2,\dots,n$)表达式为:

$$\chi_i(\phi(x)) = H(\phi(x) - l_{i-1}) H(l_i - \phi(x)) \quad (12)$$

其中, $i=1,2,\dots,m+1$ 。

因此,本文提出多相图像分割模型的能量泛函可以表示为:

$$\begin{aligned} & \min_{u_i, \phi} E(u_i, \phi) \\ & E(u_i, \phi) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{\Omega} |u_i - f|^2 \cdot \chi_i(x) dx + \\ & \quad \sum_{i=1}^m \gamma_i \int_{\Omega} |\nabla \chi_i(x)| dx \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $u_i = (u_1, u_2, \dots, u_{m+1})$ 表示不同区域 Ω_i 内的分段常值,其估计式如式(14)所示。

$$u_i = \frac{\int_{\Omega} f \chi_i(\phi(x)) dx}{\int_{\Omega} \chi_i(\phi(x)) dx} \quad (14)$$

当 u_i 被估计后,多相图像分割模型的能量泛函可以表示为:

$$\begin{aligned} \min_{u, \phi} E(u, \phi) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{\Omega} Q_i \cdot \chi_i(x) dx + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \gamma_i \int_{\Omega} |\nabla \chi_i(x)| dx \\ \text{s. t. } |\nabla \phi| &= 1 \end{aligned} \quad (15)$$

由于边缘项函数可以等价表示为:

$$\int_{\Omega} |\nabla \chi_i(x)| dx = \int_{\Omega} |\nabla \phi| \delta_{\varepsilon}(\phi - i) dx \quad (16)$$

因此本文采用的多相图像分割模型的能量泛函可以等价表示为式(17)。

$$\begin{aligned} \min_{u, \phi} E(u, \phi) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{\Omega} Q_i \cdot \chi_i(x) dx + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \gamma_i \int_{\Omega} |\nabla \phi| \delta_{\varepsilon}(\phi - i) dx \\ \text{s. t. } |\nabla \phi| &= 1 \end{aligned} \quad (17)$$

2 多相图像分割的变分方法

2.1 利用一个水平集函数标记的多相分割模型

本文在变分公式中使用曲线演化的方法对多相分段常值图像进行分割,需要解决在用变分方法进行图像分割时求解极值的问题。本文建立的模型是对文献[16]中引入方法的进一步扩展。下文通过对区域标记函数规律的总结给出标记函数的表达方式:

$$\begin{aligned} \min_{u, \phi} E(u, \phi) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{\Omega} Q_i \cdot \chi_i(x) dx + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \gamma_i \int_{\Omega} |\nabla \phi| \delta_{\varepsilon}(\phi - i) dx \\ \text{s. t. } |\nabla \phi| &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $Q_i = |u_i - f|^2$ 表示第 i 个区域分段均值项, α_i 、 β_i 为惩罚参数, $\chi_i(x)$ 表示区域第 i 个区域特征函数表达项。

由上节对区域标记函数的总结可知进行区域分割的标记函数可以表示为:

$$\chi_i(\phi(x)) = H(\phi(x) - l_{i-1})H(l_i - \phi(x)) \quad (19)$$

本文采用的多相图像分割模型,用一个连续函数的多层水平集函数隐地表示分割边界的集合,从而通过一个水平集函数表达多层水平集的方法,完成多区域图像的分割。因为该模型只涉及一个水平集函数的求解问题,所以大幅减小了计算量。

本文采用交替方向乘子算法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)加速算法对该多相图像的变分^[17]分割模型进行求解。传统的梯度降算法计算效率比较低,而直接对偶算法也需要对对偶变量用梯度降算法进行求解, Split Bregman 算法则需要引用许多辅助变量、惩罚参数以及 Bregman 迭代参数。针

对上述算法的缺点,本文采用 ADMM 多相图像算法对分割模型进行计算,从而提高计算效率,增强算法稳定性。

2.2 多相分割模型的 ADMM 算法

当 u_i 的值被计算估计后,基于一个标记函数的多相图像分割模型可以被表达为式(17)。为提高多相图像分割模型^[14,18]的计算效率,针对基于一个标记函数的多相图像分割模型,本文采用 ADMM 算法,从而可以得到多相图像分割模型的能量泛函为:

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}^{k+1}, \phi^{k+1}) &= \underset{\phi \in [0, m+1], \mathbf{w}}{\operatorname{argmin}} E(\phi, \mathbf{w}) \\ E(\phi, \mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{\Omega} Q_i \cdot \chi_i(\phi) dx + \\ &\quad \int_{\Omega} |\mathbf{w}| \cdot \sum_{i=1}^m \gamma_i \cdot \delta_{\varepsilon}(\phi - i) dx + \\ &\quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^k \cdot (\mathbf{w} - \nabla \phi) dx + \\ &\quad \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{w} - \nabla \phi|^2 dx \\ \text{s. t. } |\mathbf{w}| &= 1 \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $\boldsymbol{\lambda}$ 表示为拉格朗日乘子,用来保证数值计算的稳定性, μ ($\mu > 0$) 表示惩罚参数。不同于惩罚函数法需要运用惩罚参数来使约束条件得到满足, ADMM 加速算法能够使 μ 不用取很大值的条件来保证约束条件 $\mathbf{w} = \nabla \phi$ 成立。首先,分别对关于 ϕ 和 \mathbf{w} 的能量泛函公式取极小值,再求关于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的能量泛函公式的极大值^[19]。因此,在鞍点处求得极值的问题满足由交替优化方法得到的关于 ϕ 的欧拉拉格朗日方程为:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot Q_i \cdot \frac{\partial \chi_i(\phi)}{\partial \phi} + |\mathbf{w}^k| \sum_{i=1}^m \gamma_i \cdot \frac{\partial \delta_{\varepsilon}(\phi - i)}{\partial \phi} + \\ \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\lambda}^k - \mu \nabla \cdot (\nabla \phi - \mathbf{w}^k) = 0, x \in \Omega \\ -\boldsymbol{\lambda}^k \cdot \mathbf{n} - \mu (\nabla \phi - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = 0, x \in \partial \Omega \end{cases} \quad (21)$$

为保证标记函数的稳定性,对函数 $\phi(x)$ 加一个约束项为:

$$\phi^{k+1} = \max(0, \min(\phi^{k+1}, m+1)) \quad (22)$$

则关于 \mathbf{w}^{k+1} 的广义软阈值公式如式(23)所示。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}^{k+1} &= \max(|\nabla \phi^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}^k/c| - \\ &\quad \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \delta(\phi^{k+1} - l_i), 0) \times \frac{\nabla \phi^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}^k/c}{|\nabla \phi^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}^k/c|} \end{aligned} \quad (23)$$

对于 \mathbf{w}^{k+1} ,考虑式(20)的约束条件,对其采用以下的方法进行投影:

$$\mathbf{w}^{k+1} = \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}}{|\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}|} \quad (24)$$

然后更新 $\boldsymbol{\lambda}^{k+1}$ 得:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + c(w^{k+1} - \nabla \phi^{k+1}) \quad (25)$$

本文采用增广拉格朗日投影算法进行求解,步骤描述如下:

- 1) 初始化 ϕ^0 为水平集函数, $w^0 = \lambda^0 = 0, k = 0$ 。
- 2) 估计 u_i , 并计算 $Q_i(u_i), i = 1, 2, \dots, q$ 。
- 3) 依次求解式 (22) ~ 式 (26), 得到 $\phi_i^{k+1}, w^{k+1}, \lambda^{k+1}$ 。
- 4) 若 $\frac{E^{k+1} - E^k}{E^k} \leq \varepsilon$, 停止; 否则, $k = k + 1$, 转步骤 2)。

3 数值实验

本文实验的平台是 PC 机: Intel (R) Core (TM) i5 Duo CPU @ 3.30 GHz 3.30 GHz, 内存 4 GB, 编程运行环境: Matlab R2010b。针对本文多相图像分割模型, 采用 GDM、DDM、SBM 和 ADMM 算法进行实验。本文选择其中部分图像进行展示。图 2 是实验的原始图像。图 3 给出了图 2(b) 中几何图像区域分割的结果, 其中: 图 3(a) 为采用 GDM 算法的区域分割结果; 图 3(b) 为采用 DDM 算法的区域分割结果; 图 3(c) 为采用 SBM 算法的区域分割结果; 图 3(d) 为采用 ADMM 算法的区域分割结果。可以看出, 与其他 3 种算法相比, ADMM 加速算法可以更好地保持几何图像的分割边缘, 从而得到更准确的分割结果。图 4 为对图 2 中原始图像采用 4 种算法进行图像分割, 得到以不同颜色轮廓线划分不同区域的结果。从彩色图像的分割结果中可以看出, ADMM 算法与其他 3 种算法分割效果类似。

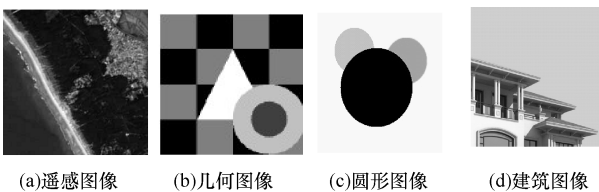


图 2 原始图像

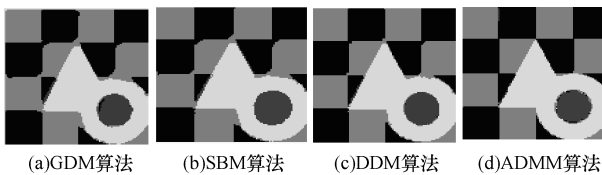


图 3 几何图像基于不同算法的区域分割结果

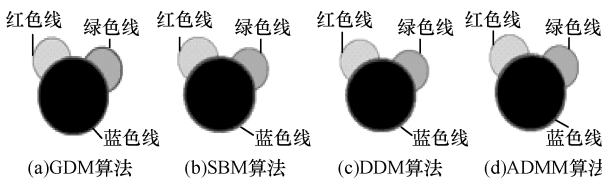


图 4 彩色图像基于不同算法的分割结果

本文从 4 幅原始图像中选择图 2(a) 和图 2(d) 2 幅图像分别加上参数 ran 分别为 0、5、10、15 的随机噪声, 然后选择传统 GDM 算法和 ADMM 加速算法进行对比实验。图 5 ~ 图 8 分别为 GDM 算法和本文算法的实验结果, 从中可以看出噪声的改变以及 2 种算法不同的处理效果。图 5、图 6 为遥感图像加入不同噪声时 2 种算法的分割结果。通过对比可以看出, 在灰度图像的分割过程中, ADMM 算法比 GDM 算法具有更强的鲁棒性。图 7、图 8 为建筑图像加入不同噪声时 2 种算法的分割结果。

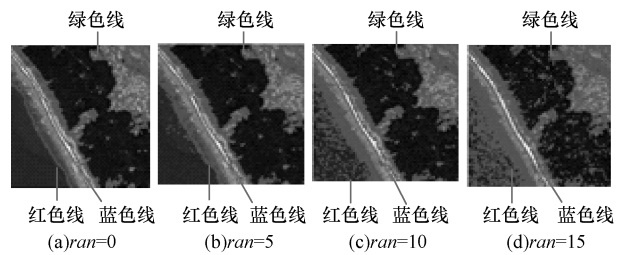


图 5 采用 GDM 算法分割加入不同噪声灰度图像的分割结果及其曲面网格图

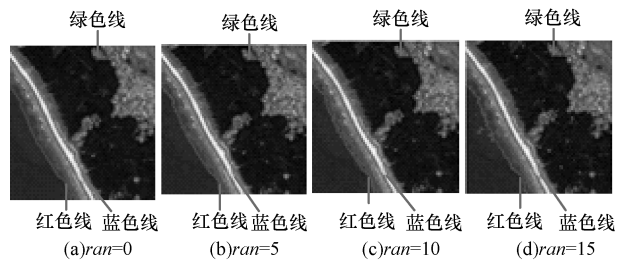


图 6 采用 ADMM 算法分割加入不同噪声灰度图像的分割结果及其曲面网格图

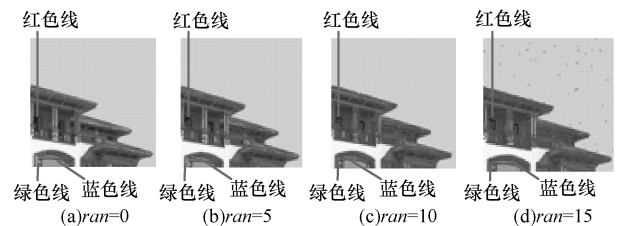


图 7 采用 GDM 算法分割加入不同噪声彩色图像的分割结果及其曲面网格图

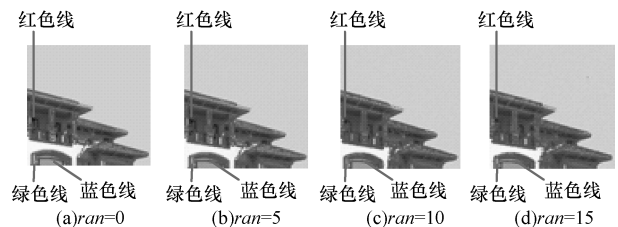


图 8 采用 ADMM 分割加入不同噪声彩色图像的分割结果及其曲面网格图

通过对比可以看出,在彩色图像的分割过程中,ADMM 算法比 GDM 算法也具有更强的鲁棒性。通过以上实验可以看出,ADMM 算法与传统的算法相比,可以得到更好的分割结果。并且,本文的 ADMM 算法与传统的 GDM 算法相比,具有更强的鲁棒性。本文在采用红、绿、蓝 3 种不同颜色曲线表示在不同区域的分割线来划分出多个区域。

对原始 4 幅图像分别采用传统 GDM、SBM、DDM 和 ADMM 算法分割,比较能量泛函收敛时所需要的迭代总次数以及迭代总时间,结果如表 1 所示。从中可以看出,无论从每步迭代时间、迭代总时间,还是收敛次数,本文 ADMM 算法的性能均较好,这很大程度上取决于 ADMM 快速算法简单的差分格式。

表 1 不同分割方法迭代次数和计算时间对比

图像	图像分辨率 /像素	GDM 算法		SBM 算法		DDM 算法		ADMM 算法	
		迭代次数	占用 CPU 时间/s	迭代次数	占用 CPU 时间/s	迭代次数	占用 CPU 时间/s	迭代次数	占用 CPU 时间/s
遥感图像	241 × 160	200	43.920	60	16.60	32	8.12	20	4.603
几何图像	150 × 150	100	38.800	28	7.36	18	3.36	18	2.767
圆形图像	256 × 256	100	2.796	29	8.26	13	4.12	14	0.391
建筑图像	392 × 285	30	2.780	22	9.16	25	15.66	10	0.626

4 结束语

本文利用基于一个函数的多层水平集标记方法对图像多个区域进行标记,并采用增广拉格朗日算法 ADMM 实现多区域图像的分割,从而简化了计算步骤,提高了多相图像分割的计算效率,同时保证了多相分割方法的鲁棒性。此外,水平集方法非常灵活,在分割过程中可引入不同类型的信息(边界、区域、形状),由于灰度和彩色图像中都包含丰富的不可预测的复杂信息,因此本文方法可有效解决图像分割问题。下一步工作是把基于一个标记函数的分割模型应用于 3D 或曲面上的多区域图像分割,并将其推广为多区域图像运动分割的变分模型。

参考文献

- [1] 高慧芳,杨明.一种改进的凸变分水平集模型在图像分割中应用[J].现代电子技术,2017,40(11):72-75.
- [2] KEEGAN M S,SANDBERG B,CHAN T F. A multiphase logic framework for multichannel image segmentation[J]. Inverse Problems and Imaging,2017,6(1):95-110.
- [3] 郭振波.基于变分水平集方法的多相图像分割研究[D].青岛:中国海洋大学,2008.
- [4] ESEDOGLU S, TSAI Y H. Threshold dynamics for the piecewise constant Mumford-Shah functional[J]. Journal of Computational Physics,2006,211(1):367-384.
- [5] CHAN T F, VESE L A. Active contours without edges[J]. IEEE Transactions on Image Processing,2001,10(2):266-277.
- [6] CHAN T F, VESE L A. An active contour model without edges[C]//Proceedings of International Conference on Scale-space Theories in Computer Vision. Berlin, Germany: Springer-Verlag,1999:141-151.
- [7] SAMSON C,BLANC F,AUBERT G, et al. A variational model for image classification and restoration[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,2000,22(5):460-472.
- [8] SAMSON C,BLANC F, RAUD L, et al. Two variational

- models for multispectral image classification [C]//Proceedings of International Workshop on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2001: 344-358.
- [9] 王靖,潘振宽,郑永果,等.基于 Potts 模型的隐式曲面上的图像分割方法[J].计算机应用研究,2014,31(9):2873-2877.
- [10] LIE J,LYSAKER M,TAI X C. Piecewise constant level set methods and image segmentation [C]//Proceedings of International Conference on Scale Space and PDE Methods in Computer Vision. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2005:573-584.
- [11] LIE J,LYSAKER M,TAI X C. A binary level set model and some applications to Mumford-Shah Image segmentation [J]. IEEE Transactions on Image Processing,2006,15(5):1171-1181.
- [12] 王君伟,刘利雄.基于水平集的局部自适应图像分割方法[J].中国科技论文,2017,12(8):895-899.
- [13] CHUNG G, VESE L A. Energy minimization based segmentation and denoising using a multilayer level set approach[C]//Proceedings of EMMCVPR'05. Berlin, Germany:Spring-Verlag,2005:439-455.
- [14] BRESSON X. A short guide on a fast global minimization algorithm for active contour models[J]. EURASIP Journal on Image and Video Processing,2014,7:16.
- [15] 刘花香,方江雄,肖静,等.基于全局凸优化变分模型的快速多相图像分割方法:CN104835168A[P].2015-08-12.
- [16] CHUNG G, VESE L A. Image segmentation using a multilayer level-set approach [J]. Computing and Visualization in Science,2009,12(6):267-285.
- [17] 方江雄.基于变分水平集的图像分割方法研究[D].上海:上海交通大学,2012.
- [18] 张勇,刘宏哲,李青.基于结构张量的 GrabCut 图像分割算法[J].计算机工程,2017,43(8):258-265,271.
- [19] 端金鸣.基于变分水平集方法的通用模型和快速投影算法研究[D].青岛:青岛大学,2014.

编辑 金胡考