

全状态约束下非线性系统自适应优化跟踪控制

常茹¹, 刘芝梦¹, 孙浩杰¹, 步春宁^{2*}

(1. 山西大学自动化与软件学院, 山西 太原 030006; 2. 沧州交通学院电子与电气工程学院, 河北 沧州 061199)

摘要: 研究具有全状态约束的不确定非线性系统的预设性能优化跟踪控制问题, 提出由自适应控制与最优补偿相结合的控制方案。首先, 利用基于障碍函数的非线性映射技术, 将受约束的状态和跟踪误差映射为非约束变量, 从而将全状态受约束问题和预设性能跟踪优化问题转化成非约束变量的收敛性问题; 其次, 构造与非约束变量相关的误差系统, 采用反步法和滤波技术设计自适应控制器, 并通过最小化成本函数的策略迭代得到最优补偿控制器; 然后, 利用李雅普诺夫稳定性理论证明了闭环误差系统的半全局一致最终有界性; 最后, 通过理论分析和数值仿真, 验证了提出的控制方案不仅能保证系统输出以良好的暂稳态性能在预设时间内实现对参考信号的跟踪, 而且可以保障系统状态始终不违反约束。

关键词: 不确定非线性系统; 强化学习; 预设性能控制; 全状态约束; 最优控制

中图分类号: TP391

文献标志码: A

DOI: 10.19678/j.issn.1000-3428.0069736

Adaptive Optimization Tracking Control of Nonlinear Systems Under Full-State Constraints

CHANG Ru¹, LIU Zhimeng¹, SUN Haojie¹, BU Chunning^{2*}

(1. School of Automation and Software Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, Shanxi, China;

2. School of Electronic and Electrical Engineering, Cangzhou Jiaotong College, Cangzhou 061199, Hebei, China)

【Abstract】 In this study, the prescribed performance optimization tracking control problem of uncertain nonlinear systems with full-state constraints is addressed, and a control scheme combining adaptive control and optimal compensation is proposed. First, by using barrier function-based nonlinear mapping techniques, the constrained states and tracking error are mapped to unconstrained variables. This results in a convergence problem of unconstrained variables, which replaces the problem of full-state constraints and prescribed performance tracking control. Second, an error system related to the unconstrained variables is constructed, an adaptive controller is designed using backstepping and filtering techniques, and the optimal compensation controller is obtained via policy iteration by minimizing the cost function. Subsequently, the semiglobal uniform ultimate boundedness of the closed-loop error system is proven using the Lyapunov stability theory. Finally, theoretical analysis and numerical simulation are used to verify that the proposed control scheme ensures that the system output tracks the reference signal with good transient stability performance within the preset time and that the system state does not violate constraints.

【Key words】 uncertain nonlinear systems; reinforcement learning; prescribed performance control; full-state constraints; optimal control

0 引言

非线性系统控制因具有广泛的实际应用背景而备受关注, 是控制领域的重点课题。经过长期研究, 自适应反步控制方法因具有强鲁棒性的优点, 已成为解决不确定非线性系统控制问题的关键方法之一。为解决由于干扰和逼近误差等因素造成的抖震问题, 文献[1]提出了一种基于神经网络的自适应反步控制方法, 保证了受控系统的稳定性; 为解决反步设计中因迭代求导产生的“微分爆炸”问题, 文献[2]提

出了一种“动态面”技术, 引入一阶滤波器, 优化了自适应反步控制器; 为解决“动态面”技术中的滤波误差问题, 文献[3]提出了一种命令滤波方法, 利用误差补偿机制消除滤波误差对系统性能的影响。值得一提的是, 上述控制方法虽然能达到控制要求, 但忽略了控制成本的优化问题。

最优控制是一种同时考虑系统控制性能和控制成本的控制策略, 能在达到控制要求的情况下最小化成本, 符合实际生产需求^[4-5]。为克服非线性系统最优控制中 HJB(Hamilton-Jacobian-Bellman)方程

收稿日期: 2024-04-12 修回日期: 2024-06-05

基金项目: 山西省基础研究计划(202303021221063, 202303021212017); 河北省高等学校科学研究项目(ZC2024095)。

通信作者 E-mail: * buchunning@czjtu.edu.cn

难以求解的问题^[6], 贝尔曼提出了动态规划(DT)方法。为克服 DT 方法中的“维数爆炸问题”, 一种名为自适应动态规划(ADP)的前向时间控制方法为非线性系统最优控制研究开辟了新思路^[7-9]。为克服迭代 ADP 算法无法适应系统变化的缺点, 基于强化学习的 ADP 方法成为了解决不确定非线性系统最优控制问题的常用技术。文献[10]针对一类单输入单输出高阶非线性系统, 设计了基于强化学习的优化跟踪控制方案; 文献[11]开发了一种基于积分强化学习(IRL)的自适应神经网络控制策略, 以最小化长期性能指标, 解决了具有干扰的连续时间非线性多输入多输出系统的优化跟踪控制问题。上述文献的研究成果为非线性系统最优控制的发展做出了重要的贡献, 但忽略了全状态约束和性能约束的现实问题。

实际上, 受控系统出于安全生产、场地限制、性能要求等原因, 通常面临各种各样的约束^[12-13]。如何在满足约束条件的情况下实现目标控制, 一直是控制问题的重点与难点。为了解决状态约束问题, 研究者提出了基于障碍李雅普诺夫函数(BLF)的反步控制方法。近年来, 这种方法被广泛运用于具有输出或状态约束的非线性系统的控制器设计过程^[14-16]。然而, 这种方法只是从理论分析角度证明了状态满足约束情况下的系统稳定性, 所设计的控制器仍需要满足复杂的“可行性条件”才能保证状态不违反约束。为解决这个问题, 文献[17]利用非线性映射技术代替 BLF 方法, 提出了一种新的状态约束控制策略, 避免了“可行性”验证, 减轻了离线设计负担。而对于性能约束问题, 文献[18]提出了预设性能控制方法, 通过构造一个光滑递减指数函数作为控制性能边界函数来约束跟踪误差, 有效解决了性能约束问题。在此基础上, 文献[19]构造了一种有限时间收敛的性能函数, 进一步实现了对误差收敛时间的直接调节。

综上所述, 研究如何在不违反约束限制的情况下, 以最优成本实现对受控系统的跟踪控制具有重要的理论研究意义。因此, 本文针对带有全状态约束问题和未知干扰的不确定非线性系统, 设计一种预设性能自适应优化跟踪控制方案。本文主要贡献如下:

1) 与自适应反步控制相关文献^[12-19]相比, 本文进一步考虑了最优控制问题。结合自适应反步控制方法与基于强化学习的最优控制方法, 设计了由自适应控制器和最优补偿器组成的综合控制器, 既实现了系统的跟踪控制目的, 又进一步优化了控制性能。

2) 与同时考虑预设性能自适应控制和最优控制的相关文献^[20-22]相比, 本文的预设性能控制方法可进一步保证跟踪误差在预设时间内收敛到规定范围。在此基础上, 本文还进一步研究了系统状态受约束问题。所设计的控制器不仅能够提高受控系统的暂态和稳态跟踪性能, 而且可以确保系统的全部状态不违反约束限制。

3) 与全状态约束控制的相关文献^[14-16]相比, 本文采用适用于非对称约束的非线性映射技术替代 BLF 方法, 将状态受约束问题转化成映射变量的收敛性问题。采用本文方法设计的状态约束控制器无需进行离线的“可行性”验证, 减轻了设计负担。

1 问题描述

1.1 系统描述

考虑如下不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) + d_i, & i=1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = u + f_n(\bar{x}_n) + d_n \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

式中: x_i 、 y 、 u 分别是 $x_i(t)$ 、 $y(t)$ 、 $u(t)$ 的简写; $x_i(t)$ 是受约束的状态, $-F_{i1} < x_i(t) < F_{i2}$, F_{i1} 和 F_{i2} 都是已知的正常数, 其中 $i=1, 2, \dots, n$; $\bar{x}_i(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t)]^T \in \mathbb{R}^i$; $u(t) \in \mathbb{R}$ 为控制输入; $y(t) \in \mathbb{R}$ 为系统输出; $f_n(\bar{x}_n)$ 为未知光滑非线性函数; $d_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$ 表示未知干扰。将期望的参考轨迹表示为 $y_d(t) \in \mathbb{R}$, 引入跟踪误差 $e = y - y_d$ 。

对不确定非线性系统[式(1)]设计跟踪控制方法以达到下列控制目标:

1) 系统输出 $y(t)$ 跟踪期望参考轨迹 $y_d(t)$, 同时, 跟踪误差 $e(t)$ 满足预设的性能要求;

2) 闭环系统所有状态不违反约束, 并且是半全局最终一致有界(SGUUB)的。

1.2 预设性能

为了实现预设性能跟踪控制目的, 采用性能函数 $\varphi(t)$ 来预先约束跟踪误差, 如下所示:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(\varphi(0) - \frac{t}{T_f} \right) e^{\left(1 - \frac{t}{T_f} \right)} + \varphi_{T_f}, & t \in [0, T_f) \\ \varphi_{T_f}, & t \in [T_f, +\infty) \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\varphi(0)$ 、 T_f 和 φ_{T_f} 均为可以预先设定的正常数。

$$-\varphi(t) < e(t) < \varphi(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (3)$$

注 1 本文选择的性能函数 $\varphi(t)$ 是一个有限时间收敛函数(FTCF), 它满足以下 3 个性质: 1) $\varphi(t) >$

0; 2) $\dot{\varphi}(t) \leq 0$; 3) $\lim_{t \rightarrow T_f} \varphi(t) = \varphi_{T_f} > 0$, 并且对于任意的 $0 < T_f < t$, 有 $\varphi(t) = \varphi_{T_f}$ 。

假设 1 参考信号 y_d 及其各阶导数 $y_d^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 连续并满足 $-F_{i1} < -\bar{A}_0 \leq y_d \leq \bar{A}_0 < F_{i2}$ 且 $|y_d^{(i)}| \leq A_i$, 其中, F_{i1} 、 F_{i2} 、 $\bar{A}_0$ 和 A_i 都是正常数。

假设 2 未知干扰 $d_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 是有界的, 并且满足 $|d_i(t)| \leq D_i, D_i > 0$ 。

引理 1^[23] 设 $F(Z)$ 是定义在 Ω 上的光滑连续函数, 其可以用径向基函数(RBF)神经网络逼近, 即:

$$F(Z) = \mathbf{W}^* \mathbf{S}(Z) + \epsilon(Z) \quad (4)$$

式中: $\mathbf{W}^*$ 表示最优权值向量; $\mathbf{S}(Z)$ 为基函数向量; $\epsilon(Z)$ 为有界的近似误差。

引理 2^[23] (杨氏不等式) 对于任意的实数 $a > 0$ 和 $b > 0$, 存在 $n > 0, m > 0, \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 1$, 使得如下不等式成立:

$$ab < \frac{a^n}{n} + \frac{b^m}{m} \quad (5)$$

1.3 非线性映射

为了实现性能约束和状态约束, 定义非线性映射 $Q: x \rightarrow \xi$ 如下:

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon^2} \\ \xi_i = \frac{x_i}{(F_{i1} + x_i)(F_{i2} - x_i)}, i = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\epsilon = \frac{e}{\varphi}$; $\mathbf{x} = [e, x_2, x_3, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 。非线性映射示意图如图 1 所示。

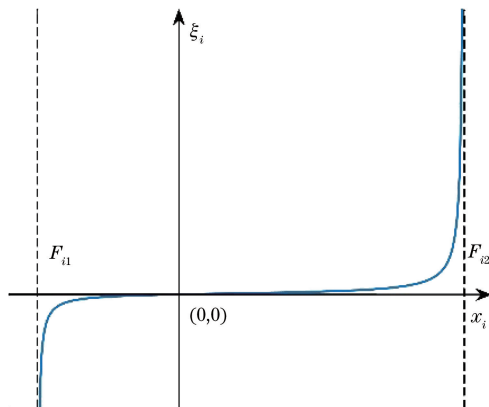


图 1 非线性映射示意图

Fig. 1 Nonlinear mapping schematic diagram

注 2 在初始状态满足 $-\varphi(0) < e(0) < \varphi(0)$ 和 $-F_{i1} < x_i(0) < F_{i2}$ 的条件下, 由式(6)和图 1 可以看出, 当误差状态 e 或系统状态 x_i 接近约束边界时, 映射变量 ξ_1 或 ξ_i 将趋于无穷。反之, 在满足初

始条件的前提下, 对于 $\forall t \geq 0$, 若 $\xi_i \in L_\infty, i = 1, 2, \dots, n$, 则有一 $-\varphi(t) < e(t) < \varphi(t)$ 和 $-F_{i1} < x_i < F_{i2}$ 。因此, 采用该非线性映射技术, 可以将跟踪误差的预设性能约束问题和全状态约束问题归结为 ξ 的收敛性问题。

2 主要结果

受文献[20]的启发, 针对受控系统分别使用反步法和最优控制方法设计自适应控制器和最优补偿控制器。最终的控制器将由两部分组成, 即 $u = u^f + u^*$ 。

2.1 自适应控制器设计

定义如下误差:

$$z_1 = \xi_1, z_i = \xi_i - \alpha_{id}, i = 2, 3, \dots, n \quad (7)$$

式中: α_{id} 为一阶滤波器输出。滤波器定义为:

$$\begin{aligned} \tau_i \dot{\alpha}_{id} + \alpha_{id} &= \frac{\alpha_{i-1}}{\beta_i}, i = 2, 3, \dots, n \\ y_i &= \alpha_{id} - \frac{\alpha_{i-1}}{\beta_i}, i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (8)$$

式中: α_{i-1} 由虚拟控制器 α_{i-1}^f 和最优虚拟补偿项 α_{i-1}^* 组成, 即 $\alpha_{i-1} = \alpha_{i-1}^f + \alpha_{i-1}^*$; τ_i 是设计的正常数; y_i 为滤波误差; $\beta_i = (F_{i1} + x_i)(F_{i2} - x_i)$ 。

接下来分步进行控制器设计。

第 1 步 定义 $\alpha_{1d} = y_d$, 根据式(1)和式(6)可得:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{\xi}_1 = p_1 \left(\dot{e} - \frac{e\dot{\varphi}}{\varphi} \right) = \\ p_1 &\left(x_2 + f_1(x_1) + d_1 - \dot{y}_d - \frac{e\dot{\varphi}}{\varphi} \right) = \\ p_1 &\left(\beta_2 z_2 + \beta_2 y_2 + \alpha_1^f + \alpha_1^* + f_1(\alpha_{1d}) + \right. \\ &\left. o_1(Z_1) + d_1 - \dot{y}_d - \frac{e\dot{\varphi}}{\varphi} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

式中: $p_1 = \frac{(1 + \epsilon^2)}{(1 - \epsilon^2)\varphi}$; $o_1(Z_1) = f_1(x_1) - f_1(\alpha_{1d})$; $Z_1 = z_1$ 。

由于 $f_1(\alpha_{1d})$ 是未知光滑非线性函数, 根据引理 1, 使用 RBF 神经网络近似 $f_1(\alpha_{1d})$:

$$f_1(\alpha_{1d}) = \mathbf{W}_1^* \mathbf{S}_1(\alpha_{1d}) + \epsilon_1(\alpha_{1d}) \quad (10)$$

式中: $|\epsilon_1(\alpha_{1d})| < \epsilon_1$ 且 $\epsilon_1 > 0$ 。定义 $\hat{\mathbf{W}}_1$ 是期望权值向量 $\mathbf{W}_1^*$ 的估计, 同时有 $\hat{f}_1(\alpha_{1d}) = \hat{\mathbf{W}}_1^T \mathbf{S}_1(\alpha_{1d})$ 为 $f_1(\alpha_{1d})$ 的估计。定义 $\tilde{\mathbf{W}}_1 = \mathbf{W}_1^* - \hat{\mathbf{W}}_1$ 为权值估计误差, 同时可以得到 $\dot{\tilde{\mathbf{W}}}_1 = -\dot{\hat{\mathbf{W}}}_1$ 。

考虑如式(11)所示的候选李雅普诺夫函数, 使用杨氏不等式得到式(12)~式(15)。

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_1^T \tilde{\mathbf{W}}_1 + \frac{1}{2} y_2^2 \quad (11)$$

$$z_1 p_1 \epsilon_1(\alpha_{1d}) \leq \frac{p_1^2 z_1^2}{2} + \frac{\epsilon_1^2}{2} \quad (12)$$

$$z_1 p_1 d_1 \leq \frac{p_1^2 z_1^2}{2} + \frac{D_1^2}{2} \quad (13)$$

$$z_1 p_1 \beta_2 z_2 \leq \frac{p_1^2 z_1^2}{2} + \frac{\beta_2^2 z_2^2}{2} \quad (14)$$

$$z_1 p_1 \beta_2 y_2 \leq \frac{p_1^2 z_1^2}{2} + \frac{\beta_2^2 y_2^2}{2} \quad (15)$$

对李雅普诺夫函数[式(11)]求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1 \dot{z}_1 - \tilde{\mathbf{W}}_1^T \dot{\hat{\mathbf{W}}}_1 + y_2 \dot{y}_2 = \\ & z_1 p_1 \left(\beta_2 z_2 + \beta_2 y_2 + \alpha_1^f + \alpha_1^* + f_1(\alpha_{1d}) + o_1(Z_1) + d_1 - \dot{y}_d - \frac{e\dot{\phi}}{\varphi} \right) - \tilde{\mathbf{W}}_1^T \dot{\hat{\mathbf{W}}}_1 + y_2 \dot{y}_2 = \\ & z_1 p_1 \left(\beta_2 z_2 + \beta_2 y_2 + \alpha_1^f + \alpha_1^* + \hat{\mathbf{W}}_1^T \mathbf{S}_1(\alpha_{1d}) + \tilde{\mathbf{W}}_1^T \mathbf{S}_1(\alpha_{1d}) + \epsilon_1(\alpha_{1d}) + o_1(Z_1) + d_1 - \dot{y}_d - \frac{e\dot{\phi}}{\varphi} \right) - \tilde{\mathbf{W}}_1^T \dot{\hat{\mathbf{W}}}_1 + \\ & y_2 \dot{y}_2 \leq z_1 p_1 \left(\alpha_1^f + \alpha_1^* + \tilde{\mathbf{W}}_1^T \mathbf{S}_1(\alpha_{1d}) + \hat{\mathbf{W}}_1^T \mathbf{S}_1(\alpha_{1d}) + 2p_1 z_1 + o_1(Z_1) - \dot{y}_d - \frac{e\dot{\phi}}{\varphi} \right) + y_2 \dot{y}_2 + \\ & \frac{\beta_2^2 z_2^2}{2} + \frac{\beta_2^2 y_2^2}{2} + \frac{\epsilon_1^2}{2} + \frac{D_1^2}{2} - \tilde{\mathbf{W}}_1^T \dot{\hat{\mathbf{W}}}_1 \end{aligned} \quad (16)$$

设计虚拟控制器 α_1^f 和自适应律 $\dot{\hat{\mathbf{W}}}_1$ 如下:

$$\alpha_1^f = -\frac{k_1 z_1}{p_1} - 2p_1 z_1 - \hat{\mathbf{W}}_1^T \mathbf{S}_1(\alpha_{1d}) + \dot{y}_d + \frac{e\dot{\phi}}{\varphi} \quad (17)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}}_1 = p_1 z_1 \mathbf{S}_1(\alpha_{1d}) - \sigma_1 \hat{\mathbf{W}}_1 \quad (18)$$

式中: $k_1 > 0$ 和 $\sigma_1 > 0$ 是设计参数。

根据式(17)和式(18),式(16)可写为:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -k_1 z_1^2 + z_1 p_1 \alpha_1^* + z_1 p_1 o_1(Z_1) + y_2 \dot{y}_2 + \\ & \frac{\beta_2^2 z_2^2}{2} + \frac{\beta_2^2 y_2^2}{2} + \frac{\epsilon_1^2}{2} + \frac{D_1^2}{2} + \sigma_1 \tilde{\mathbf{W}}_1^T \hat{\mathbf{W}}_1 \end{aligned} \quad (19)$$

为了防止复杂度爆炸问题,引入一阶滤波器来过滤虚拟控制器。回顾 y_2 的表达式和式(8),可得:

$$\dot{y}_2 = \dot{\alpha}_{2d} - \left(\frac{\alpha_1}{\beta_2} \right)' = -\frac{y_2}{\tau_2} + \mathcal{L}_1 \quad (20)$$

式中: $\mathcal{L}_1 = -\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2} \right)'$ 。因此可以得到:

$$y_2 \dot{y}_2 = -\frac{y_2^2}{\tau_2} + y_2 \mathcal{L}_1 \leq \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\tau_2} \right) y_2^2 + \mathcal{L}_1^2 \quad (21)$$

将式(21)代入式(19),可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -k_1 z_1^2 + z_1 p_1 \alpha_1^* + z_1 p_1 o_1(Z_1) + \\ & \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\tau_2} \right) y_2^2 + \mathcal{L}_1^2 + \frac{\beta_2^2 z_2^2}{2} + \frac{\beta_2^2 y_2^2}{2} + \frac{\epsilon_1^2}{2} + \frac{D_1^2}{2} + \\ & \sigma_1 \tilde{\mathbf{W}}_1^T \hat{\mathbf{W}}_1 \leq -k_1 z_1^2 + z_1 p_1 \alpha_1^* + z_1 p_1 o_1(Z_1) - \\ & \tau_2^* y_2^2 + \mathcal{L}_1^2 + \frac{\beta_2^2 z_2^2}{2} + \sigma_1 \tilde{\mathbf{W}}_1^T \hat{\mathbf{W}}_1 + \Gamma_1 \end{aligned} \quad (22)$$

式中: $\Gamma_1 = \frac{\epsilon_1^2}{2} + \frac{D_1^2}{2}$; $\tau_2^* > 0$ 是一个满足 $\frac{1}{\tau_2} \geq \frac{1}{4} +$

$\tau_2^* + \frac{1}{2} \beta_2^2$ 的过渡参数。

第 i 步 ($i=2, 3, \dots, n-1$) 由式(1)、式(6)和

式(7)可得:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \dot{\bar{z}}_i - \dot{\alpha}_{id} = p_i (\beta_{i+1} z_{i+1} + \beta_{i+1} y_{i+1} + \alpha_i^f + \\ & \alpha_i^* + f_i(\bar{\alpha}_{id}) + o_i(\mathbf{Z}_i) + d_i) - \dot{\alpha}_{id} \end{aligned} \quad (23)$$

式中: $p_i = \frac{(F_{i1} F_{i2} + x_i^2)}{\beta_i}$; $o_i(\mathbf{Z}_i) = f_i(\bar{x}_i) - f_i(\bar{\alpha}_{id})$; $\mathbf{Z}_i = [z_1, z_2, \dots, z_i]^T$; $\bar{\alpha}_{id} = [\alpha_{1d}, \alpha_{2d}, \dots, \alpha_{id}]^T$ 。

定义 $F_i(\bar{\alpha}_{id}) = p_i f_i(\bar{\alpha}_{id}) - \dot{\alpha}_{id} + \frac{\beta_i^2 z_i}{2} + \frac{z_i}{2} +$

$\frac{3}{2} p_i^2 z_i$ 。根据引理 1, $F_i(\bar{\alpha}_{id})$ 可被 RBF 神经网络近似为:

$$F_i(\bar{\alpha}_{id}) = \mathbf{W}_i^* \mathbf{S}_i(\bar{\alpha}_{id}) + \epsilon_i(\bar{\alpha}_{id}) \quad (24)$$

式中: $|\epsilon_i(\bar{\alpha}_{id})| < \epsilon_i$ 且 $\epsilon_i > 0$ 。

定义 $\hat{\mathbf{W}}_i$ 是期望权值向量 $\mathbf{W}_i^*$ 的估计,同时有 $\hat{F}_i(\bar{\alpha}_{id}) = \hat{\mathbf{W}}_i^T \mathbf{S}_i(\bar{\alpha}_{id})$ 是 $F_i(\bar{\alpha}_{id})$ 的估计。定义 $\tilde{\mathbf{W}}_i =$

$\mathbf{W}_i^* - \hat{\mathbf{W}}_i$ 为权值估计误差,同时可以得到 $\dot{\tilde{\mathbf{W}}}_i = -\dot{\hat{\mathbf{W}}}_i$ 。

考虑如下候选李雅普诺夫函数:

$$V_i = \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_i^T \tilde{\mathbf{W}}_i + \frac{1}{2} y_{i+1}^2 + V_{i-1} \quad (25)$$

使用杨氏不等式有:

$$z_i \epsilon_i(\bar{\alpha}_{id}) \leq \frac{z_i^2}{2} + \frac{\epsilon_i^2}{2} \quad (26)$$

$$z_i p_i d_i \leq \frac{p_i^2 z_i^2}{2} + \frac{D_i^2}{2} \quad (27)$$

$$z_i p_i \beta_{i+1} z_{i+1} \leq \frac{p_i^2 z_i^2}{2} + \frac{\beta_{i+1}^2 z_{i+1}^2}{2} \quad (28)$$

$$z_i p_i \beta_{i+1} y_{i+1} \leq \frac{p_i^2 z_i^2}{2} + \frac{\beta_{i+1}^2 y_{i+1}^2}{2} \quad (29)$$

对李雅普诺夫函数[式(25)]求导可得:

$$\dot{V}_i = z_i \dot{z}_i - \tilde{\mathbf{W}}_i^T \dot{\mathbf{W}}_i + y_{i+1} \dot{y}_{i+1} + \dot{V}_{i-1} \leq$$

$$z_i(p_i \alpha_i^f + p_i \alpha_i^* + \tilde{\mathbf{W}}_i^T \mathbf{S}_i(\bar{\alpha}_{id}) + \tilde{\mathbf{W}}_i^T \mathbf{S}_i(\bar{\alpha}_{id}) + p_i o_i(\mathbf{Z}_i)) + y_{i+1} \dot{y}_{i+1} - \tilde{\mathbf{W}}_i^T \dot{\mathbf{W}}_i + \frac{\beta_{i+1}^2 z_{i+1}^2}{2} + \frac{\beta_{i+1}^2 y_{i+1}^2}{2} + \frac{\epsilon_i^2}{2} + \frac{D_i^2}{2} - \sum_{j=1}^{i-1} k_j z_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} z_j p_j \alpha_j^* + \sum_{j=1}^{i-1} z_j p_j o_j(\mathbf{Z}_j) + \sum_{j=1}^i \tau_j^* y_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{L}_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \Gamma_j + \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j \tilde{\mathbf{W}}_j^T \dot{\mathbf{W}}_j \quad (30)$$

设计虚拟控制器 α_i^f 和自适应律 $\dot{\mathbf{W}}_i$ 如下:

$$\alpha_i^f = \frac{1}{p_i} (-k_i z_i - \tilde{\mathbf{W}}_i^T \mathbf{S}_i(\bar{\alpha}_{id})) \quad (31)$$

$$\dot{\mathbf{W}}_i = z_i \mathbf{S}_i(\bar{\alpha}_{id}) - \sigma_i \mathbf{W}_i \quad (32)$$

式中: $k_i > 0$ 和 $\sigma_i > 0$ 是设计参数。

由式(8)可得:

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{\alpha}_{(i+1)d} - \left(\frac{\alpha_i}{\beta_{i+1}} \right)' = -\frac{y_{i+1}}{\tau_{i+1}} + \mathcal{L}_i \quad (33)$$

式中: $\mathcal{L}_i = -\left(\frac{\alpha_i}{\beta_{i+1}} \right)'$ 。因此可以得到:

$$y_{i+1} \dot{y}_{i+1} = -\frac{y_{i+1}^2}{\tau_{i+1}} + y_{i+1} \mathcal{L}_i \leq \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\tau_{i+1}} \right) y_{i+1}^2 + \mathcal{L}_i^2 \quad (34)$$

根据式(31)、式(32)和式(34),式(30)可写为:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -\sum_{j=1}^i k_j z_j^2 + \sum_{j=1}^i z_j p_j \alpha_j^* + \sum_{j=1}^i z_j p_j o_j(\mathbf{Z}_j) + \sum_{j=2}^{i+1} \tau_j^* y_j^2 + \sum_{j=1}^i \mathcal{L}_j^2 + \sum_{j=1}^i \Gamma_j + \sum_{j=1}^i \sigma_j \tilde{\mathbf{W}}_j^T \dot{\mathbf{W}}_j + \frac{\beta_{i+1}^2 z_{i+1}^2}{2} \end{aligned} \quad (35)$$

式中: $\Gamma_i = \frac{\epsilon_i^2}{2} + \frac{D_i^2}{2}$; $\tau_{i+1}^* > 0$ 是一个满足 $\frac{1}{\tau_{i+1}} \geq \frac{1}{4} +$

$$\dot{V}_n \leq z_n(p_n u^f + p_n u^* + p_n o_n(\mathbf{Z}_n) + \tilde{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{S}_n(\bar{\alpha}_{nd}) + \tilde{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{S}_n(\bar{\alpha}_{nd})) + \frac{\epsilon_n^2}{2} + \frac{D_n^2}{2} - \tilde{\mathbf{W}}_n^T \dot{\mathbf{W}}_n -$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} k_j z_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} z_j p_j \alpha_j^* + \sum_{j=1}^{n-1} z_j p_j o_j(\mathbf{Z}_j) + \sum_{j=2}^n \tau_j^* y_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \Gamma_j + \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j \tilde{\mathbf{W}}_j^T \dot{\mathbf{W}}_j \quad (39)$$

式(39)是已经应用杨氏不等式 $z_n \epsilon_n(\bar{\alpha}_{nd}) \leq (z_n^2/2) + (\epsilon_n^2/2)$ 和 $z_n p_n d_n \leq (p_n^2 z_n^2/2) + (D_n^2/2)$ 的结果。

设计理想控制律 u^f 和自适应律 $\dot{\mathbf{W}}_n$ 如下:

$$u^f = \frac{1}{p_n} (-k_n z_n - \tilde{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{S}_n(\bar{\alpha}_{nd})) \quad (40)$$

$$\dot{\mathbf{W}}_n = z_n \mathbf{S}_n(\bar{\alpha}_{nd}) - \sigma_n \mathbf{W}_n \quad (41)$$

式中: $k_n > 0$ 和 $\sigma_n > 0$ 是设计参数。

将式(40)和式(41)代入式(39)中,令 $\Gamma_n = \frac{\epsilon_n^2}{2} +$

$\tau_{i+1}^* + \frac{1}{2} \beta_{i+1}^2$ 的过渡参数。

第 n 步 由式(1)、式(6)和式(7)可得:

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \dot{\xi}_n - \dot{\alpha}_{nd} = p_n(u^f + u^* + f_n(\bar{\alpha}_{nd}) + o_n(\mathbf{Z}_n) + d_n) - \dot{\alpha}_{nd} \end{aligned} \quad (36)$$

式中: $p_n = \frac{(F_{n1} F_{n2} + x_n^2)}{\beta_n}$; $o_n(\mathbf{Z}_n) = f_n(\bar{x}_n) - f_n(\bar{\alpha}_{nd})$; $\mathbf{Z}_n = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$; $\bar{\alpha}_{nd} = [\alpha_{1d}, \alpha_{2d}, \dots, \alpha_{nd}]^T$ 。

定义 $F_n(\bar{\alpha}_{nd}) = p_n f_n(\bar{\alpha}_{nd}) - \dot{\alpha}_{nd} + \frac{z_n}{2} + \frac{p_n^2 z_n}{2} +$

$\frac{\beta_n^2 z_n}{2}$ 。根据引理 1, $F_n(\bar{\alpha}_{nd})$ 可被 RBF 神经网络近似为:

$$F_n(\bar{\alpha}_{nd}) = \mathbf{W}_n^* \mathbf{S}_n(\bar{\alpha}_{nd}) + \epsilon_n(\bar{\alpha}_{nd}) \quad (37)$$

式中: $|\epsilon_n(\bar{\alpha}_{nd})| < \epsilon_n$ 且 $\epsilon_n > 0$ 。

定义 $\hat{\mathbf{W}}_n$ 是期望权值向量 $\mathbf{W}_n^*$ 的估计,同时有

$\hat{F}_n(\bar{\alpha}_{nd}) = \hat{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{S}_n(\bar{\alpha}_{nd})$ 是 $F_n(\bar{\alpha}_{nd})$ 的估计。定义 $\tilde{\mathbf{W}}_n = \mathbf{W}_n^* - \hat{\mathbf{W}}_n$ 为权值估计误差,同时可以得到 $\dot{\tilde{\mathbf{W}}}_n = -\dot{\hat{\mathbf{W}}}_n$ 。

考虑如下候选李雅普诺夫函数:

$$V_n = \frac{1}{2} z_n^2 + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_n^T \tilde{\mathbf{W}}_n + V_{n-1} \quad (38)$$

对 V_n 求导可得:

$$\dot{V}_n \leq z_n(p_n u^f + p_n u^* + p_n o_n(\mathbf{Z}_n) + \tilde{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{S}_n(\bar{\alpha}_{nd}) + \tilde{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{S}_n(\bar{\alpha}_{nd})) + \frac{\epsilon_n^2}{2} + \frac{D_n^2}{2} - \tilde{\mathbf{W}}_n^T \dot{\mathbf{W}}_n -$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} k_j z_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} z_j p_j \alpha_j^* + \sum_{j=1}^{n-1} z_j p_j o_j(\mathbf{Z}_j) + \sum_{j=2}^n \tau_j^* y_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \Gamma_j + \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j \tilde{\mathbf{W}}_j^T \dot{\mathbf{W}}_j \quad (39)$$

$\frac{D_n^2}{2}$, 可以得到如下不等式:

$$\dot{V}_n \leq z_n p_n u^* + z_n p_n o_n(\mathbf{Z}_n) -$$

$$\sum_{j=1}^n k_j z_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} z_j p_j \alpha_j^* + \sum_{j=1}^{n-1} z_j p_j o_j(\mathbf{Z}_j) + \sum_{j=2}^n \tau_j^* y_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_j^2 + \sum_{j=1}^n \Gamma_j + \sum_{j=1}^n \sigma_j \tilde{\mathbf{W}}_j^T \dot{\mathbf{W}}_j \quad (42)$$

使用杨氏不等式有:

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j \tilde{\mathbf{W}}_j^T \dot{\mathbf{W}}_j \leq -\frac{\sigma_{\max}}{2} \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} + \frac{\sigma_{\max}}{2} \|\mathbf{W}\|^2 \quad (43)$$

将式(43)代入式(42)中,可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\alpha_1 \|\mathbf{Z}\|^2 - \frac{\sigma_{\max}}{2} \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{W} + \frac{\sigma_{\max}}{2} \|\mathbf{W}\|^2 + \sum_{j=2}^n \tau_j^* y_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_j^2 + \sum_{j=1}^n \Gamma_j + z_n p_n u^* + z_n p_n o_n(\mathbf{Z}_n) + \\ & \sum_{j=1}^{n-1} z_j p_j \alpha_j^* + \sum_{j=1}^{n-1} z_j p_j o_j(\mathbf{Z}_j) \leq -\alpha_1 \|\mathbf{Z}\|^2 - \alpha_2 \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{W} + \Delta + \mathbf{Z}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} o_1(\mathbf{Z}_1) \\ o_2(\mathbf{Z}_2) \\ \vdots \\ o_n(\mathbf{Z}_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^* \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^* \\ u^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

式中: $\mathbf{Z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$; $\tilde{\mathbf{W}} = [\tilde{\mathbf{W}}_1, \tilde{\mathbf{W}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{W}}_n]^T$; $\Delta = \frac{\sigma_{\max}}{2} \|\mathbf{W}\|^2 + \sum_{j=2}^n \tau_j^* y_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_j^2 + \sum_{j=1}^n \Gamma_j$;
 $\alpha_1 = \min\{k_1, k_2, \dots, k_n, \frac{1}{2}\}$; $\alpha_2 = \min\{\frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_2}{2}, \dots, \frac{\sigma_n}{2}, \frac{1}{2}\}$; $\mathbf{P} = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$; $\sigma_{\max} = \max\{\sigma_n, \bar{\sigma}_n\}$ 。

注 3 定义 $\mathbf{U}^* = [\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_{n-1}^*, u^*]^T$, 因为 $\mathbf{U}^*$ 的存在, 在此阶段暂不能得到闭环系统的稳定性。

接下来, 需要利用最优控制方法设计最优补偿控制器, 以进一步证明闭环系统的稳定性。基于此, 现重新定义如下带有补偿控制器的新系统:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} o_1(\mathbf{Z}_1) \\ o_2(\mathbf{Z}_2) \\ \vdots \\ o_n(\mathbf{Z}_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^* \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^* \\ u^* \end{bmatrix} \quad (45)$$

2.2 最优补偿控制器设计

考虑系统[式(45)], 可以得到:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{P}(\mathbf{o}(\bar{\mathbf{Z}}) + \mathbf{U}^*) \quad (46)$$

式中: $\mathbf{o}(\bar{\mathbf{Z}}) = [o_1(\mathbf{Z}_1), o_2(\mathbf{Z}_2), \dots, o_n(\mathbf{Z}_n)]^T$; $\mathbf{U}^* = [\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_{n-1}^*, u^*]^T$ 。

对系统[式(46)]定义如下成本函数:

$$V(\mathbf{Z}) = \int_0^\infty (\mathbf{Z}^T \mathbf{Q} \mathbf{Z} + \mathbf{U}^{*T} \mathbf{R} \mathbf{U}^*) dt \quad (47)$$

式中: $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$ 和 $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$ 是正定对称矩阵。

根据成本函数[式(47)], Hamilton 函数可表示为:

$$\mathcal{H}(\mathbf{Z}, \mathbf{U}^*, \nabla V) = \nabla V(\mathbf{Z})^T \mathbf{P}(\mathbf{o}(\bar{\mathbf{Z}}) + \mathbf{U}^*) + \mathbf{Z}^T \mathbf{Q} \mathbf{Z} + \mathbf{U}^{*T} \mathbf{R} \mathbf{U}^* \quad (48)$$

式中: $\nabla V(\mathbf{Z})^T$ 是成本函数关于 $\mathbf{Z}$ 的偏导数。

为了得到最优补偿项, 根据最优控制理论, 通过

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{U}^*} = 0$, 得到最优补偿控制输入如下:

$$\mathbf{U}^* = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}^T \nabla V^*(\mathbf{Z})^T \quad (49)$$

式中: $\nabla V^*(\mathbf{Z})^T$ 是最优值函数的梯度。然后得到

对应的 HJB 方程如下:

$$\mathcal{H}(\mathbf{Z}, \mathbf{U}^*, \nabla V^*) = \nabla V^*(\mathbf{Z})^T \mathbf{P}(\mathbf{o}(\bar{\mathbf{Z}}) + \mathbf{U}^*) + \mathbf{Z}^T \mathbf{Q} \mathbf{Z} + \mathbf{U}^{*T} \mathbf{R} \mathbf{U}^* = 0 \quad (50)$$

通过求解 HJB 方程可获得 $\mathbf{V}^*(\mathbf{Z})^T$, 从而获得最优补偿项。然而, HJB 方程是一个一阶偏微分方程, 很难求解。受文献[20]的启发, 采用策略迭代 (PI) 算法近似求解 HJB 方程以获得最优解。在本文中, 策略迭代的目的是找到可以最小化成本函数[式(47)]的最优补偿项 $\mathbf{U}^*$ 。

算法 PI 算法

初始化 选择初始值 $\mathbf{U}^{*0} \in \Omega$

1) 通过如下公式计算出成本函数 $\mathbf{V}^i$:

$$\mathcal{H}(\mathbf{Z}, \mathbf{U}^{*0}) = \nabla \mathbf{V}^i(\mathbf{Z})^T \mathbf{P}(\mathbf{o}(\bar{\mathbf{Z}}) + \mathbf{U}^{*0}) + \mathbf{Z}^T \mathbf{Q} \mathbf{Z} + \mathbf{U}^{*0T} \mathbf{R} \mathbf{U}^{*0} = 0 \quad (51)$$

2) 使用如下公式更新 $\mathbf{U}^{*i+1}$:

$$\mathbf{U}^{*i+1} = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}^T \nabla \mathbf{V}^i(\mathbf{Z})^T \quad (52)$$

令 $i = i + 1$, 回到第 1) 步。 $\epsilon_v > 0$ 是一个预先设定的正常数, 若 $\|\mathbf{V}^{i+1}(\bar{\mathbf{Z}}) - \mathbf{V}^i(\bar{\mathbf{Z}})\| \leq \epsilon_v$, 则计算在第 2) 步停止。

注 4 算法 1 中使用的 PI 算法为经典 PI 算法, 其收敛性已经在文献[24-25]中得到证明。

接下来, 本文将基于强化学习方法建立“执行-评价”结构的神经网络来实现所提出的算法。首先使用 RBF 神经网络近似成本函数及其梯度如下:

$$\mathbf{V}^i(\mathbf{Z}) = \mathbf{W}_c^{*T} \boldsymbol{\phi}_c(\mathbf{Z}) + \epsilon_c(\mathbf{Z}) \quad (53)$$

$$\nabla \mathbf{V}^i(\mathbf{Z}) = \nabla \boldsymbol{\phi}_c(\mathbf{Z})^T \mathbf{W}_c^* + \nabla \epsilon_c(\mathbf{Z}) \quad (54)$$

式中: $\mathbf{W}_c^*$ 是期望的权值向量; $\epsilon_c(\mathbf{Z})$ 是神经网络近似误差; $\nabla \boldsymbol{\phi}_c(\mathbf{Z})$ 是高斯基函数的梯度; $\nabla \epsilon_c(\mathbf{Z})$ 是神经网络近似误差的梯度。

假设 3 对于评价神经网络[式(53)], 其基函数向量 $\boldsymbol{\phi}_c(\mathbf{Z})$ 和基函数向量梯度 $\nabla \boldsymbol{\phi}_c(\mathbf{Z})$ 、神经网络近似误差 $\epsilon_c(\mathbf{Z})$ 和神经网络近似误差梯度 $\nabla \epsilon_c(\mathbf{Z})$ 均有界, 即 $\|\boldsymbol{\phi}_c(\mathbf{Z})\| \leq \epsilon_\phi$ 、 $\|\nabla \boldsymbol{\phi}_c(\mathbf{Z})\| \leq \epsilon_T$ 、 $\|\epsilon_c\| \leq c_1$ 、 $\|\nabla \epsilon_c\| \leq c_2$, 其中 ϵ_ϕ 、 ϵ_T 、 c_1 、 c_2 是正常数。

将式(54)代入式(48)和式(49)中可得:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{Z}, \mathbf{W}_c^*) &= \mathbf{Z}^T \mathbf{Q} \mathbf{Z} + \nabla \boldsymbol{\phi}_c(\mathbf{Z})^T \mathbf{W}_c^* \mathbf{P} \mathbf{o}(\bar{\mathbf{Z}}) - \\ &\frac{1}{4} \mathbf{W}_c^{*T} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{W}_c^* + e_{\text{HJB}} = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

$$U^* = -\frac{1}{2}R^{-1}P^T(\nabla\phi_c(Z)^T W_c^* + \nabla\epsilon_c(Z)) \quad (56)$$

在式(55)中: $e_{HJB} = \nabla\epsilon_\tau(Z)^T P(o(\bar{Z}) + U^*) + \frac{1}{4}\nabla\epsilon_\tau(Z)^T PR^{-1}P^T \nabla\epsilon_\tau(Z)$ 表示由神经网络近似引起的残差, $\Lambda = \nabla\phi_c(Z)PR^{-1}P^T \nabla\phi_c(Z)^T$ 。由假设 3 可得 e_{HJB} 有界, 即 $\|e_{HJB}\| \leq \epsilon_c$ 且 $\epsilon_c > 0$ 。

定义 $\hat{W}_c$ 为理想权值向量 W_c^* 的估计值, 定义 $\tilde{W}_c = W_c^* - \hat{W}_c$ 为权值估计误差, 同时可以得到 $\dot{\tilde{W}}_c = -\dot{\hat{W}}_c$, 则式(53)和式(54)可表示为:

$$\hat{V}^i(Z) = \hat{W}_c^T \phi_c(Z) \quad (57)$$

$$\nabla\hat{V}(Z)^i = \nabla\phi_c(Z)^T \hat{W}_c \quad (58)$$

根据式(57)和式(58), 最优补偿项 U^* 和 HJB 函数的估计值可以分别表示为:

$$\mathcal{H}(Z, \hat{W}_c) = Z^T QZ + \nabla\phi_c(Z)^T \hat{W}_c P \bar{o}(Z) - \frac{1}{4}\hat{W}_c^T \Lambda \hat{W}_c \quad (59)$$

$$\hat{U}^{i+1} = -\frac{1}{2}R^{-1}P^T \nabla\phi_c(Z)^T \hat{W}_c \quad (60)$$

式中: $\bar{o}(Z) = [\bar{o}_1(Z_1), \bar{o}_2(Z_2), \dots, \bar{o}_n(Z_n)]^T$ 为未知量 $o(\bar{Z})$ 的估计量。估计误差为 $\bar{o}(Z) = o(\bar{Z}) - \bar{o}(Z)$, $\dot{\bar{o}}(Z) = -\dot{\bar{o}}(Z)$ 。

设计理想神经网络权值估计的更新律为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}}_c = & -\alpha_c \frac{\omega}{(1+\omega^T \omega)^2} \times \\ & \left(Z^T QZ + \nabla\phi_c(Z)^T \hat{W}_c P \bar{o}(Z) - \frac{1}{4}\hat{W}_c^T \Lambda \hat{W}_c \right)^T \end{aligned} \quad (61)$$

式中: $\omega = \nabla\phi_c(Z)^T P(\bar{o}(Z) + \hat{U}^{i+1})$; $\alpha_c > 0$ 是强化学习梯度下降算法的学习率。

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{V}_{HJB} + \dot{V}_n = \tilde{W}_c^T \dot{\hat{W}}_c - \bar{o}^T \dot{\bar{o}} + \dot{V}_n = -\alpha_1 \|Z\|^2 - \alpha_2 \|\tilde{W}\|^2 + \Delta + Z^T P \mathcal{O} - \\ & \frac{\alpha_c}{(1+\omega^T \omega)^2} \left(\tilde{W}_c^T \nabla\phi_c P \mathcal{O} - \tilde{W}_c^T \nabla\phi_c P \bar{o} + \frac{1}{2}\tilde{W}_c^T \nabla\phi_c PR^{-1}P^T \nabla\epsilon_c + \frac{1}{2}\tilde{W}_c^T \Lambda \tilde{W}_c \right) \times \\ & \left(\tilde{W}_c^T \nabla\phi_c P \mathcal{O} - \tilde{W}_c^T \nabla\phi_c P \bar{o} + \frac{1}{2}\tilde{W}_c^T \nabla\phi_c PR^{-1}P^T \nabla\epsilon_c + \frac{1}{4}\tilde{W}_c^T \Lambda \tilde{W}_c + e_{HJB} + W_c^{*T} \nabla\phi_c P \bar{o} \right)^T + \lambda \bar{o}^T \bar{o} \end{aligned} \quad (65)$$

需要说明的是, 上式中代入了式(56)、式(62)和式(63), 且省略了自变量 $\bar{Z}$ 和 Z 。式中 $\mathcal{O} = o - \frac{1}{2}R^{-1}P^T \nabla\phi_c(Z)^T W_c^* - \frac{1}{2}R^{-1}P^T \nabla\epsilon_c(Z)$, 由于 $P\mathcal{O}\mathcal{O}^T P^T = \|P\mathcal{O}\|^2 \geq 0$, 则存在一个常数 $\lambda_1 > 0$ 使得 $P\mathcal{O}\mathcal{O}^T P^T \leq \lambda_1$ 。同理, 存在常数 $\lambda_2 > 0$ 、 $\lambda_3 > 0$ 、 $\lambda_4 > 0$ 、 $\lambda_5 > 0$ 、 $\lambda_6 > 0$, 使得 $\nabla\phi_c P\mathcal{O}\mathcal{O}^T P^T \nabla\phi_c^T \leq \lambda_2$, $\nabla\phi_c PR^{-1}P^T \nabla\epsilon_c \nabla\epsilon_c^T PR^{-1}P^T \nabla\phi_c^T \leq \lambda_3$, $\Lambda = \nabla\phi_c PR^{-1}P^T \nabla\phi_c^T \leq \lambda_4$, $\nabla\phi_c P P^T \nabla\phi_c^T \leq \lambda_5$,

根据式(59)和 $\dot{\tilde{W}}_c = -\dot{\hat{W}}_c$, 将式(61)展开可得:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{W}}_c = & -\frac{\alpha_c}{(1+\omega^T \omega)^2} \left(\nabla\phi_c(Z) \left(\dot{Z} - P \bar{o}(\bar{Z}) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{2}PR^{-1}P^T \nabla\epsilon_c(\bar{Z}) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{2}PR^{-1}P^T \nabla\phi_c(Z)^T \tilde{W}_c \right) \right) \times \\ & \left(\tilde{W}_c^T \nabla\phi_c(Z) \left(\dot{Z} - P \bar{o}(\bar{Z}) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{2}PR^{-1}P^T \nabla\epsilon_c(\bar{Z}) \right) + W_c^{*T} \nabla\phi_c(Z) P \bar{o}(\bar{Z}) + \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{4}\tilde{W}_c^T \Lambda \tilde{W}_c + e_{HJB} \right)^T \right) \end{aligned} \quad (62)$$

此时, 设计自适应律 $\dot{\bar{o}}(Z)$ 为:

$$\dot{\bar{o}}(Z) = -\lambda \bar{o}(Z) \quad (63)$$

式中: $\lambda > 0$ 为待设计参数。

3 稳定性分析

定理 1 对于系统[式(1)], 在满足初始条件 $-\varphi(0) < e(0) < \varphi(0)$ 和 $-F_{i1} < x_i(0) < F_{i2}$ 的前提下, 若假设 1~假设 3 成立, 应用设计的自适应控制器[式(17)、式(31)、式(40)]、最优补偿项[式(60)]和 RBF 神经网络控制结构的权值更新律[式(18)、式(32)、式(41)、式(61)]和自适应律[式(63)], 那么, 闭环系统是半全局最终一致有界的。

证明:

定义如下候选李雅普诺夫函数:

$$V = V_{HJB} + V_n = \frac{1}{2}\tilde{W}_c^T \tilde{W}_c + \frac{1}{2}\bar{o}(Z)^T \bar{o}(Z) + V_n \quad (64)$$

对其求导可得:

$P^T \nabla\phi_c^T W_c^* W_c^{*T} \nabla\phi_c P \leq \lambda_6$ 。对式(65)中的部分项进行放缩, 有下式成立:

$$Z^T P \mathcal{O} \leq \frac{\|Z\|^2}{2} + \frac{\lambda_1}{2} \quad (66)$$

$$\tilde{W}_c^T \nabla\phi_c P \mathcal{O} \mathcal{O}^T P^T \nabla\phi_c^T \tilde{W}_c \leq \lambda_2 \tilde{W}_c^T \tilde{W}_c \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\tilde{W}_c^T \nabla\phi_c PR^{-1}P^T \nabla\epsilon_c \nabla\epsilon_c^T PR^{-1}P^T \nabla\phi_c^T \tilde{W}_c \leq \\ \frac{1}{4}\lambda_3 \tilde{W}_c^T \tilde{W}_c \end{aligned} \quad (68)$$

$$\frac{1}{8} \tilde{\mathbf{W}}_c^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{W}}_c \tilde{\mathbf{W}}_c^T \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{W}}_c \leq \frac{1}{8} \lambda_4^2 \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^4 \quad (69)$$

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \mathbf{O} (\tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}^T \nabla \epsilon_c)^T \leq \frac{1}{4} \lambda_2 \tilde{\mathbf{W}}_c^T \tilde{\mathbf{W}}_c + \frac{1}{4} \lambda_3 \tilde{\mathbf{W}}_c^T \tilde{\mathbf{W}} \quad (70)$$

$$\frac{1}{4} \tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \mathbf{O} (\tilde{\mathbf{W}}_c^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{W}}_c)^T \leq \frac{1}{8} \lambda_2 \tilde{\mathbf{W}}_c^T \tilde{\mathbf{W}}_c + \frac{1}{8} \lambda_4^2 \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^4 \quad (71)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \mathbf{O} \mathbf{e}_{\text{HJB}}^T \leq \frac{1}{2} \lambda_2 \tilde{\mathbf{W}}_c^T \tilde{\mathbf{W}}_c + \frac{1}{2} \epsilon_e^2 \quad (72)$$

$$\frac{1}{8} \tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}^T \nabla \epsilon_c (\tilde{\mathbf{W}}_c^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{W}}_c)^T \leq \frac{1}{16} \lambda_3 \tilde{\mathbf{W}}_c^T \tilde{\mathbf{W}}_c + \frac{1}{16} \lambda_4^2 \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^4 \quad (73)$$

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}^T \nabla \epsilon_c \mathbf{e}_{\text{HJB}}^T \leq \frac{1}{4} \lambda_3 \tilde{\mathbf{W}}_c^T \tilde{\mathbf{W}}_c + \frac{1}{4} \epsilon_e^2 \quad (74)$$

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_c^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{W}}_c \mathbf{e}_{\text{HJB}}^T \leq \frac{1}{4} \lambda_4^2 \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^4 + \frac{1}{4} \epsilon_e^2 \quad (75)$$

$$-\tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \mathbf{O} (\tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \tilde{\mathbf{o}})^T \leq \frac{1}{4} \lambda_2 \tilde{\mathbf{W}}_c^T \tilde{\mathbf{W}}_c + \frac{1}{4} (\lambda_5 \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^2 + \|\tilde{\mathbf{o}}\|^2)^2 \quad (76)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \mathbf{O} (\mathbf{W}_c^{*T} \nabla \phi_c \mathbf{P} \tilde{\mathbf{o}})^T \leq \frac{1}{4} \lambda_2 \tilde{\mathbf{W}}_c^T \tilde{\mathbf{W}}_c + \frac{1}{4} (\lambda_5 \|\mathbf{W}_c^*\|^2 + \|\tilde{\mathbf{o}}\|^2)^2 \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} = & \dot{\mathbf{V}}_{\text{HJB}} + \dot{\mathbf{V}}_n = \tilde{\mathbf{W}}_c^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_c - \tilde{\mathbf{o}}^T \dot{\tilde{\mathbf{o}}} + \dot{\mathbf{V}}_n = -\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right) \|\mathbf{Z}\|^2 - \alpha_2 \|\tilde{\mathbf{W}}\|^2 - \frac{\lambda}{2} \tilde{\mathbf{o}}^T \tilde{\mathbf{o}} - \\ & \frac{\alpha_c}{(1+\mathbf{w}^T \mathbf{w})^2} \left(\frac{19\lambda_2}{8} + \frac{15\lambda_3}{16} + \frac{\lambda_5}{2} \right) \tilde{\mathbf{W}}_c^T \tilde{\mathbf{W}}_c - \frac{\alpha_c}{(1+\mathbf{w}^T \mathbf{w})^2} \frac{\lambda_6}{2} \|\tilde{\mathbf{o}}\|^4 - \frac{\alpha_c}{(1+\mathbf{w}^T \mathbf{w})^2} \frac{37\lambda_4^2}{64} \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^4 - \\ & \frac{\alpha_c}{(1+\mathbf{w}^T \mathbf{w})^2} (\lambda_5 \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^2 + \|\tilde{\mathbf{o}}\|^2)^2 - \frac{\alpha_c}{(1+\mathbf{w}^T \mathbf{w})^2} \frac{3}{4} (\lambda_5 \|\mathbf{W}_c^*\|^2 + \|\tilde{\mathbf{o}}\|^2)^2 - \frac{\alpha_c}{(1+\mathbf{w}^T \mathbf{w})^2} \frac{5}{4} \epsilon_e^2 + \\ & \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{o}\|^2 + \Delta + \frac{\lambda_1}{2} \end{aligned} \quad (85)$$

$$\text{令 } \alpha = \min \left\{ 2\alpha_1 - 1, 2\alpha_2, \frac{2\alpha_c}{(1+\mathbf{w}^T \mathbf{w})^2} \left(\frac{19\lambda_2}{8} + \frac{15\lambda_3}{16} + \frac{\lambda_5}{2} \right), \lambda \right\}, \bar{\Delta} = -\frac{\alpha_c}{(1+\mathbf{w}^T \mathbf{w})^2} \frac{5}{4} \epsilon_e^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{o}\|^2 +$$

$$\Delta + \frac{\lambda_1}{2}, \bar{\mathbf{V}} = \|\tilde{\mathbf{o}}\|^4 + \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^4 + (\lambda_5 \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^2 + \|\tilde{\mathbf{o}}\|^2)^2 +$$

$$(\lambda_5 \|\mathbf{W}_c^*\|^2 + \|\tilde{\mathbf{o}}\|^2)^2, \quad \eta = \min \left\{ \frac{\alpha_c \lambda_6}{2(1+\mathbf{w}^T \mathbf{w})^2}, \right.$$

$$\left. \frac{37\lambda_4^2 \alpha_c}{64(1+\mathbf{w}^T \mathbf{w})^2}, \frac{\alpha_c}{(1+\mathbf{w}^T \mathbf{w})^2}, \frac{3\alpha_c}{4(1+\mathbf{w}^T \mathbf{w})^2} \right\}, \text{则以下不等式成立:}$$

$$\dot{\mathbf{V}} \leq -\alpha \mathbf{V} - \eta \bar{\mathbf{V}} + \bar{\Delta} \quad (86)$$

$$\frac{1}{4} \tilde{\mathbf{W}}_c^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{W}}_c (\mathbf{W}_c^{*T} \nabla \phi_c \mathbf{P} \tilde{\mathbf{o}})^T \leq \frac{1}{64} \lambda_4^2 \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^4 + \frac{1}{4} (\lambda_5 \|\mathbf{W}_c^*\|^2 + \|\tilde{\mathbf{o}}\|^2)^2 \quad (78)$$

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}^T \nabla \epsilon_c (\mathbf{W}_c^{*T} \nabla \phi_c \mathbf{P} \tilde{\mathbf{o}})^T \leq \frac{1}{16} \lambda_3 \tilde{\mathbf{W}}_c^T \tilde{\mathbf{W}}_c + \frac{1}{4} (\lambda_5 \|\mathbf{W}_c^*\|^2 + \|\tilde{\mathbf{o}}\|^2)^2 \quad (79)$$

$$-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \tilde{\mathbf{o}} (\tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}^T \nabla \epsilon_c)^T \leq \frac{1}{16} \lambda_3 \tilde{\mathbf{W}}_c^T \tilde{\mathbf{W}}_c + \frac{1}{4} (\lambda_5 \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^2 + \|\tilde{\mathbf{o}}\|^2)^2 \quad (80)$$

$$-\tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \tilde{\mathbf{o}} \mathbf{e}_{\text{HJB}}^T \leq \frac{1}{4} \epsilon_e^2 + \frac{1}{4} (\lambda_5 \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^2 + \|\tilde{\mathbf{o}}\|^2)^2 \quad (81)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \tilde{\mathbf{o}} (\tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \tilde{\mathbf{o}})^T \leq \frac{1}{4} (\lambda_5 \|\tilde{\mathbf{W}}_c\|^2 + \|\tilde{\mathbf{o}}\|^2)^2 \quad (82)$$

$$\begin{aligned} & -\tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \tilde{\mathbf{o}} (\tilde{\mathbf{W}}_c^{*T} \nabla \phi_c \mathbf{P} \tilde{\mathbf{o}})^T = \\ & -\tilde{\mathbf{W}}_c^T \nabla \phi_c \mathbf{P} \tilde{\mathbf{o}} \tilde{\mathbf{o}}^T \mathbf{P}^T \nabla \phi_c^T \tilde{\mathbf{W}}_c^* \leq \\ & \frac{1}{2} \lambda_5 \tilde{\mathbf{W}}_c^T \tilde{\mathbf{W}}_c + \frac{1}{2} \lambda_6 \|\tilde{\mathbf{o}}\|^4 \end{aligned} \quad (83)$$

$$\lambda \tilde{\mathbf{o}}^T \tilde{\mathbf{o}} = \lambda \tilde{\mathbf{o}}^T (\mathbf{o} - \tilde{\mathbf{o}}) \leq -\frac{\lambda}{2} \tilde{\mathbf{o}}^T \tilde{\mathbf{o}} + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{o}\|^2 \quad (84)$$

将以上式子代入式(65),可以得到:

综上,根据李雅普诺夫稳定性理论可知,闭环系统是半全局最终一致有界的。证毕。

4 MATLAB 仿真

在本节中,将提供如下 MATLAB 数值仿真来验证所提出的控制方法的有效性。

考虑如下不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 0.5x_1 + 0.05 \sin t \\ \dot{x}_2 = 0.1x_1x_2^2 + 0.01x_1 + u + 0.1 \sin t \\ y = x_1 \end{cases} \quad (87)$$

式中: $0.05 \sin t$ 和 $0.1 \sin t$ 为系统受到的外部干扰;系统状态受到的约束为 $-0.8 < x_1(t) < 0.9$ 、

$-1 < x_2(t) < 0.7$; 期望的参考轨迹是 $y_d(t) = 0.5 \sin t$ 。

根据前面的设计步骤,可以得到如式(17)、式(31)、式(40)和式(60)所示的控制器。

在仿真中设计参数选择为 $k_1 = 10$ 、 $k_2 = 20$ 、 $\sigma_1 = 2$ 、 $\sigma_2 = 2$ 、 $Q = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $\alpha_c = 0.01$ 、 $\phi_0 = 1$ 、 $\phi_{T_f} = 0.04$ 和 $T_f = 2$ s; 系统状态初始值选择为 $x_0 = [0.5, 0]^T$; 神经网络初值选择为 $\hat{W}_1(0) = 1$ 、 $\hat{W}_2(0) = 1$ 、 $\hat{W}_c(0) = 0.5$ 。RBF 神经网络由 9 个神经元组成,这些神经元的中心均匀分布在 $[-2 \times 2] \times [-2 \times 2] \times [-2 \times 2]$, $\mu_i = 1.5$ 。

仿真结果如图 2~图 6 所示。

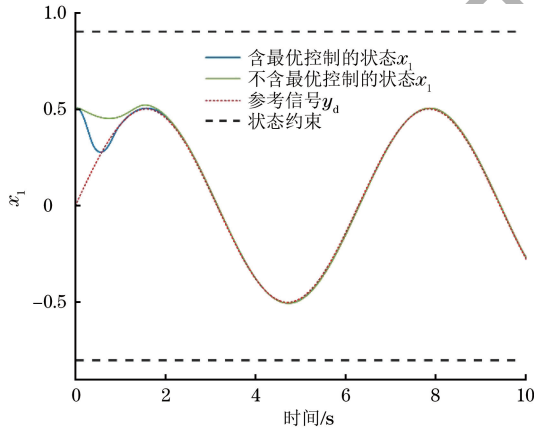


图 2 y_d 、 $y = x_1$ 的轨迹和状态约束边界

Fig.2 Trajectories of y_d and $y = x_1$ with state bounds

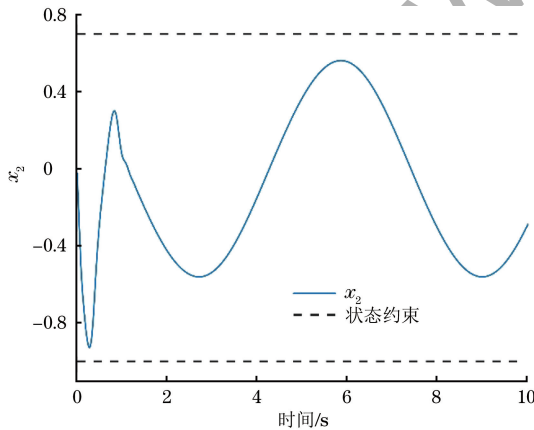


图 3 x_2 的轨迹和状态约束边界

Fig.3 Trajectory of x_2 with state bounds

从图 2 可以看出,输出状态可以准确地跟踪参考信号,且输出状态始终没有超出状态约束边界。图 3 显示了状态 x_2 的轨迹信息,很明显 x_2 被约束在了预设的约束边界里。跟踪误差曲线和性能边界如图 4 所示,与未使用预设性能控制方法的结果相比,显然本文所提出的方法能使跟踪误差 $e(t)$ 在预设时间内收敛,且收敛速度快、精度高。图 5 展示的

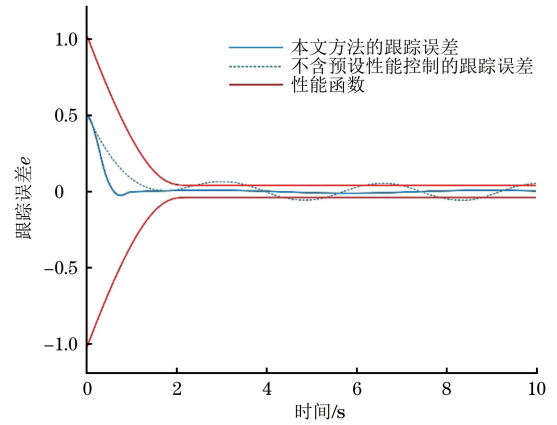


图 4 跟踪误差 e 的轨迹和性能函数界限

Fig.4 Trajectories of tracking error e and performance function bounds

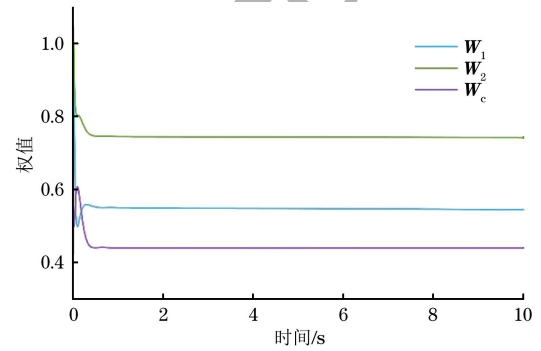


图 5 神经网络权值的收敛性能

Fig.5 Convergence performances of the neural network weights

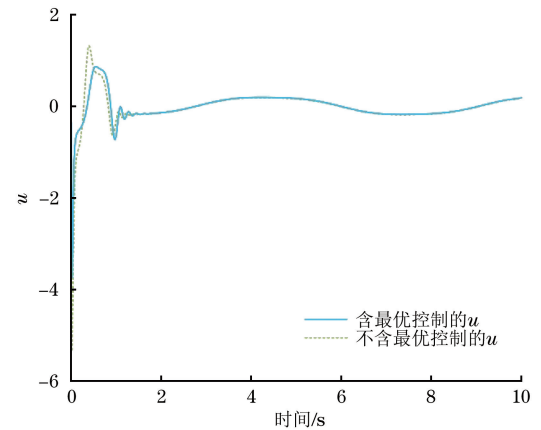


图 6 控制输入

Fig.6 Control input

是神经网络权值的收敛曲线,可以看到在一定时间之后,神经网络权值收敛到 $[0.5408, 0.7402, 0.4398]$ 。图 6 显示控制输入信号也是有界的。结合图 2 和图 6 可以看出,与未使用最优控制方法的结果相比,本文方法不仅降低了控制成本,而且实现了快速跟踪,优化了跟踪性能。

5 结束语

本文以带有全状态约束与未知干扰的不确定非

线性系统为被控对象,研究了预设性能自适应跟踪控制问题。采用非线性映射技术避免在控制方案设计过程中繁琐的“可行性条件”验证过程,同时将约束受限问题转换为映射变量的收敛性问题。将反步法和最优控制方法结合起来,设计了带有最优补偿项的自适应控制器,在保证闭环系统稳定性的同时最小化控制成本。所设计的控制器不仅能够提高受控系统的暂态和稳态跟踪性能,而且可以保障系统的全部状态不违反约束限制,有效应对了实际工程控制中的多种受限约束问题,具有一定的理论和现实意义。

参考文献

- [1] MA Z Y, MA H J. Adaptive fuzzy backstepping dynamic surface control of strict-feedback fractional-order uncertain nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 28(1): 122-133.
- [2] LI T S, WANG D, FENG G, et al. A DSC approach to robust adaptive NN tracking control for strict-feedback nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2010, 40(3): 915-927.
- [3] YANG W, YU W, LV Y, et al. Adaptive fuzzy tracking control design for a class of uncertain nonstrict-feedback fractional-order nonlinear SISO systems [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 51(6): 3039-3053.
- [4] LI Y M, LIU Y J, TONG S C. Observer-based neuro-adaptive optimized control of strict-feedback nonlinear systems with state constraints[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, 33(7): 3131-3145.
- [5] HEYDARI M H, RAZZAGHI M. A numerical approach for a class of nonlinear optimal control problems with piecewise fractional derivative[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2021, 152: 111465.
- [6] DREYFUS S E, LAW A M. The art and theory of dynamic programming[M]. New York, USA: Academic Press, 1977.
- [7] 谭旭峰, 李媛, 刘洋. 基于自适应动态规划的随机时滞线性二次型最优跟踪控制[J]. 系统科学与数学, 2024, 44(1): 17-30.
TAN X F, LI Y, LIU Y. Stochastic time-delay linear quadratic optimal tracking control based on adaptive dynamic programming[J]. Systems Science and Mathematics, 2024, 44(1): 17-30. (in Chinese)
- [8] 吴翔, 刘春生, 孙景亮. 基于 ADP 的导引控制一体化全状态受限反演控制[J]. 信息与控制, 2019, 48(3): 293-301.
WU X, LIU C S, SUN J L. Integrated full state constrained inversion control of guidance control based on ADP [J]. Information and Control, 2019, 48(3): 293-301. (in Chinese)
- [9] CHEN Z, CHEN S Z, CHEN K, et al. Constrained decoupling adaptive dynamic programming for a partially uncontrollable time-delayed model of energy systems[J]. Information Sciences, 2022, 608: 1352-1374.
- [10] WEN G, NIU B. Optimized tracking control based on reinforcement learning for a class of high-order unknown nonlinear dynamic systems[J]. Information Sciences, 2022, 606: 368-379.
- [11] XU B, LI Y X, HOU Z, et al. Dynamic event-triggered reinforcement learning-based consensus tracking of nonlinear multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2023, 70(5): 2120-2132.
- [12] CHANG R, BAI Z Z, ZHANG B Y, et al. Adaptive finite-time prescribed performance tracking control for unknown nonlinear systems subject to full-state constraints and input saturation[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(17): 9347-9362.
- [13] CHANG R, BAI Z Z, JIAO T, et al. Adaptive prescribed performance tracking control of high-order uncertain nonlinear systems under full-state time-varying constraints [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2024, 34(8): 5505-5523.
- [14] LIU L, LIU Y J, CHEN A, et al. Integral barrier Lyapunov function-based adaptive control for switched nonlinear systems[J]. Science China Information Sciences, 2020, 63: 1-14.
- [15] FUENTES-AGUILAR R Q, CHAIREZ I. Adaptive tracking control of state constraint systems based on differential neural networks: a barrier Lyapunov function approach[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 31(12): 5390-5401.
- [16] LIU C, LIU X, WANG H, et al. Finite-time adaptive tracking control for unknown nonlinear systems with a novel barrier Lyapunov function[J]. Information Sciences, 2020, 528: 231-245.
- [17] ZHAO K, SONG Y, CHEN C L P, et al. Control of nonlinear systems under dynamic constraints: a unified barrier function-based approach[J]. Automatica, 2020, 119: 109102.
- [18] BECHLIOLIS C P, ROVITHAKIS G A. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(9): 2090-2099.
- [19] CHANG R, HOU T T, BAI Z Z, et al. Event-triggered adaptive tracking control for nonlinear systems with input saturation and unknown control directions[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2024, 34(6): 3891-3911.
- [20] HUANG Z, BAI W, LI T, et al. Adaptive reinforcement learning optimal tracking control for strict-feedback nonlinear systems with prescribed performance [J]. Information Sciences, 2023, 621: 407-423.
- [21] HUANG Z, GAO X, LI T, et al. Prescribed performance event-triggered fuzzy optimal tracking control for strict-feedback nonlinear systems[J]. Information Sciences, 2024, 658: 120014.
- [22] 郭子杰, 白伟伟, 周琪, 等. 基于性能指标约束的一类输入死区非线性系统最优控制[J]. 自动化学报, 2019, 45(11): 2128-2136.
GUO Z J, BAI W W, ZHOU Q, et al. Optimal control of a class of input deadband nonlinear systems based on performance index constraints [J]. Journal of Automation, 2019, 45(11): 2128-2136. (in Chinese)
- [23] 曹晔. 基于函数变换的约束非线性系统跟踪控制[D]. 重庆: 重庆大学, 2020.
CAO Y. Constrained nonlinear system tracking control based on function transformation [D]. Chongqing: Chongqing University, 2020. (in Chinese)
- [24] ABU-KHALAF M, LEWIS F L. Nearly optimal control laws for nonlinear systems with saturating actuators using a neural network HJB approach [J]. Automatica, 2005, 41(5): 779-791.
- [25] LIU D, YANG X, LI H. Adaptive optimal control for a class of continuous-time affine nonlinear systems with unknown internal dynamics[J]. Neural Computing and Applications, 2013, 23: 1843-1850.