第36卷 第20期 计 算 机 工 程 2010年10月
Vol.36 No.20 Computer Engineering October 2010
·博士论文· 文章编号：1000—3428(2010)20—0032—02 文献标识码：A 中图分类号：TP393

时变时滞 NCS 控制器的改进设计

刘自鑫[1a,2]，吕 恕[1a]，钟守铭[1a]，叶 茂[1b]
(1. 电子科技大学 a. 应用数学学院；b. 计算机科学与工程学院，成都 611731；2. 贵州财经学院数学与统计学院，贵阳 550004)

摘 要：建立时滞差分不等式，得到网络化控制系统(NCS)的指数稳定判据，基于该判据设计 NCS 状态反馈控制器。该设计以线性矩阵不等式(LMI)形式给出，不包含任何自由矩阵，通过 Matlab 中的 LMI 工具箱进行求解。数值仿真结果表明，该设计具有计算量小、求解方便、保守性弱的特点。

关键词：网络化控制系统；时变时滞；线性矩阵不等式；指数稳定

Improved Design of Time-varying Delay NCS Controller

LIU Zi-xin[1a,2], LV Shu[1a], ZHONG Shou-ming[1a], YE Mao[1b]
(1a. School of Applied Mathematics; 1b. School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Guizhou College of Finance and Economics, Guiyang 550004, China)

【Abstract】 This paper obtains an exponential stability criterion of Networked Control System(NCS) by constructing a delayed difference inequality. On the basis of this new established criterion, it designs a feedback controller in the form of Linear Matrix Inequality(LMI). It does not contain any free-weighting matrices, and can be solved by LMI toolbox in Matlab software. Numerical value simulation result shows that this design has less computational complexity and conservatism, and it is convenient to implement.

【Key words】 Networked Control System(NCS); time-varying delay; Linear Matrix Inequality(LMI); exponential stable

1 概述

网络控制系统[1](Networked Control System, NCS)相对传统的点对点互连控制系统而言，具有成本低、易于信息共享、灵活性高、易于扩展维护等优点[2]，广泛应用于制造系统、工业过程控制、航空航天等领域[3]。由于有限的通信带宽和承载能力，网络诱导时延、丢包、数据错序等现象不可避免，从而严重影响网络系统的性能和稳定性，因此时滞网络化控制系统成为当前一个研究热点[4]。目前，网络控制系统的稳定性分析[5]、网络拥塞控制[6]、鲁棒控制[7]、容错控制[8]等方面已取得较大进展。为使网络控制系统具有更好的动态性，文献[9]研究了一类大延时网络化控制问题，并提出一种保性能控制方法。基于文献[9]的结论，文献[10]针对一类具有时变时延不确定网络控制系统，推导出一个保守性更弱的时延补偿保性能判据，并基于该判据设计了使系统渐近稳定的保性能控制器。文献[9-10]中的线性矩阵不等式判据形式复杂，且判据中均含有逆矩阵。当系统维数较高时，判据的计算量大，不利于控制器的设计。另外，这些判据只能判定系统的渐近稳定性，不能判定系统的指数稳定性。针对文献[9-10]中判据存在的缺点，本文通过建立一个新的时滞差分不等式，提出一个改进判据，有效地克服了上述不足。

2 网络化控制问题描述

本文采用图 1 所示的单回路网络控制系统，考虑了网络诱导时滞、数据丢包及错序等因素。图 1 中的被控对象可以采用如下离散线性系统加以描述[8]：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)\end{cases} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x}(k)\in R^n$、$\boldsymbol{u}(k)\in R^m$、$\boldsymbol{y}(k)\in R^l$ 分别表示状态向量、控制输入和控制输出变量；$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为具有适当维数的常数矩阵。

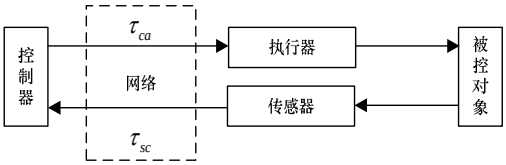


图 1 网络化控制系统结构

在图 1 中，τ_{ca}、τ_{sc} 分别表示从传感器到控制器和控制器到执行器的网络时延。综合考虑这 2 类时延，状态反馈控制器 $\boldsymbol{u}(k)$ 可以用 $\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k-\tau(k))$ 形式表示[10]，其中，$\tau(k)$ 为时变时延具有上下界 τ_m、τ_M。将 $\boldsymbol{u}(k)$ 代入式(1)，网络控制系统可描述为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k-\tau(k)) & k>0\\ \boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\phi}(k) & k\in[-\tau_M,0]\end{cases} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{\phi}(k)$ 为初始函数。为设计控制器 $\boldsymbol{u}(k)$ 使得网络控制闭环系统(2)指数稳定，引入如下定义。

定义 如果存在正数 $\alpha>0$、$0<\beta<1$ 使得：

基金项目：国家“973”计划基金资助项目(2010CB732501)；教育部新世纪优秀人才支持计划基金资助项目(NCET-06-0811)；贵州省科学技术基金资助项目([2010]2139)

作者简介：刘自鑫(1977－)，男，讲师、博士研究生，主研方向：网络化控制系统，时滞系统；吕 恕，副教授、博士研究生；钟守铭、叶 茂，教授、博士生导师

收稿日期：2010-04-21 **E-mail：**zixinliu@foxmail.com

$$\| x(k) \| \le \alpha \cdot \beta^k \sup_{s\in\mathbb{N}[-\tau_M,0]} \| x(s) \|, \forall k \ge 0$$

则称式(2)是指数稳定的。

3 网络化控制系统的稳定性分析

为分析式(2)的指数稳定性，给出一个时滞差分不等式。

定理 1 如果存在正数 α_1、α_2，$\varepsilon > \beta > 0$，非负实数 α_3，以及非负函数 $V(\boldsymbol{x}(k))$ 使得：

$$\begin{cases} \alpha_2 \| \boldsymbol{x}(k) \|^2 \le V(\boldsymbol{x}(k)) \le \alpha_1 \| \boldsymbol{x}(k) \|^2 + \alpha_3 \sum_{i=k-\tau_M}^{k-1} \| \boldsymbol{x}(i) \|^2 \\ \Delta V(\boldsymbol{x}(k)) \le -\varepsilon \| \boldsymbol{x}(k) \|^2 + \beta \| \boldsymbol{x}(k-\tau(k)) \|^2 \end{cases} \tag{3}$$

则存在 $\theta_0 > 1$ 使得：

$$\| \boldsymbol{x}(k) \|^2 \le \frac{1}{\alpha_2 \theta_0^{\,k}} \{ V(\boldsymbol{x}(0)) + [(1-\theta_0)^{-1}\theta_0\beta(1-\theta_0^{\tau_M+1}) + (\theta_0 - 1)\alpha_3\tau_M^2\theta_0^{\tau_M}] \sup_{j\in N[-\tau_M,0]} \| \boldsymbol{x}(j) \|^2 \} \tag{4}$$

证明：对于任意 $\theta > 1$，由不等式(3)可知：

$$\theta^{j+1}V(\boldsymbol{x}(j+1)) - \theta^j V(\boldsymbol{x}(j)) \le \theta^j[-\varepsilon\theta \| \boldsymbol{x}(j) \|^2 + \theta\beta \| \boldsymbol{x}(j-\tau(j)) \|^2 + (\theta-1)(\alpha_1 \| \boldsymbol{x}(j) \|^2 + \alpha_3 \textstyle\sum_{i=j-\tau_M}^{j-1} \| \boldsymbol{x}(i) \|^2)]$$

对式(4)2 边关于 j 从 0 到 k-1 求和得到：

$$\theta^k V(\boldsymbol{x}(k)) - V(\boldsymbol{x}(0)) \le [\theta\beta \textstyle\sum_{j=0}^{\tau_M} \theta^j + (\theta-1)\alpha_3\tau_M^2\theta^{\tau_M}] \sup_{j\in N[-\tau_M,0]} \| \boldsymbol{x}(j) \|^2 + [\beta\theta^{1+\tau_M} + \alpha_1(\theta-1) - \varepsilon\theta + (\theta-1)\alpha_3\tau_M\theta^{\tau_M}] \textstyle\sum_{j=0}^{k} \theta^j \| \boldsymbol{x}(j) \|^2 \tag{5}$$

令 $\omega(\theta) = \beta\theta^{1+\tau_M} + \alpha_1(\theta-1) - \varepsilon\theta + (\theta-1)\alpha_3\tau_M\theta^{\tau_M}$。因为 $\omega(1) = \beta - \varepsilon < 0$，由连续性可知一定存在 $\theta_0 > 1$ 使得 $\omega(\theta_0) < 0$。由式(5)可得：

$$V(\boldsymbol{x}(k)) \le \theta_0^{-k}[V(\boldsymbol{x}(0)) + \theta_0\beta \textstyle\sum_{j=0}^{\tau_M} \theta_0^j + (\theta_0 - 1)\alpha_3\tau_M^2\theta_0^{\tau_M}] \sup_{j\in N[-\tau_M,0]} \| \boldsymbol{x}(j) \|^2$$

从而不等式(4)成立。

基于定理 1 的结论，容易得到如式(2)的指数稳定条件。

定理 2 式(2)是指数稳定的，如果存在正定对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 及任意正数 $\beta_1 > \beta_2 > 0$，使得如下矩阵不等式成立：

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_{11} & \boldsymbol{\Xi}_{12} & \boldsymbol{\Xi}_{13} \\ * & \boldsymbol{\Xi}_{22} & \boldsymbol{\Xi}_{23} \\ * & * & \boldsymbol{\Xi}_{33} \end{bmatrix} < 0 \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{\Xi}_{11} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} - 2\boldsymbol{Q} + 2\beta_1\boldsymbol{Q}; \boldsymbol{\Xi}_{12} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}; \boldsymbol{\Xi}_{13} = 2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}$；$\boldsymbol{\Xi}_{22} = -2\beta_2\boldsymbol{Q}$；$\boldsymbol{\Xi}_{23} = 2\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$；$\boldsymbol{\Xi}_{33} = -2\boldsymbol{Q}$；“*”表示对称矩阵主对角线下方的相应子块矩阵。

证明：构造如下 Lyapunov 函数

$$V(k) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) \tag{7}$$

令 $\boldsymbol{\eta}(k) = \boldsymbol{x}(k+1) - \boldsymbol{x}(k)$，对式(7)求差分得到：

$$\Delta V(k) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k+1) - 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) \tag{8}$$

由于 $\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k-\tau(k)) \\ \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{\eta}(k) + \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$，因此式(8)变为：

$$\Delta V(k) = 2[\boldsymbol{\eta}(k) + \boldsymbol{x}(k)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{x}(k-\tau(k))] - 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q}]\boldsymbol{x}(k) + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k-\tau(k)) + 2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + 2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k-\tau(k))] \tag{9}$$

对于任意正数 $\beta_1 > \beta_2 > 0$，有：

$$\begin{cases} 2\beta_2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(k))\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-\tau(k)) - 2\beta_2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(k))\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-\tau(k)) = 0 \\ 2\beta_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) - 2\beta_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

令 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(k) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k), \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k-\tau(k)), \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)]$，由式(9)、式(10)可得：

$$\Delta V(k) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{X}(k) - 2\beta_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) + 2\beta_2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k-\tau(k))\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k-\tau(k)) \tag{11}$$

当不等式(6)成立时，由式(11)可得：

$$\Delta V(k) \le -2\beta_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) + 2\beta_2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k-\tau(k))\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k-\tau(k))$$

当 $\beta_1 > \beta_2 > 0$ 时，由定理 1 可得：

$$\| \boldsymbol{x}(k) \|^2 \le \frac{1}{\alpha_2\theta_0^{\,k}} \{ V(\boldsymbol{x}(0)) + (1-\theta_0)^{-1}\theta_0\beta_2(1-\theta_0^{\tau_M+1}) \sup_{j\in N[-\tau_M,0]} \| \boldsymbol{x}(j) \|^2 \}$$

其中，$\alpha_1 = \lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}); \alpha_2 = \lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})$，定理得证。

4 控制器设计

定理 3 对任意给定的正数 $\beta_1 > \beta_2 > 0$，如果存在正定对称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及正数 $\gamma > 0$ 使得如下线性矩阵不等式成立：

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_{11} & \boldsymbol{\Xi}_{12} & \boldsymbol{\Xi}_{13} \\ * & \boldsymbol{\Xi}_{22} & \boldsymbol{\Xi}_{23} \\ * & * & \boldsymbol{\Xi}_{33} \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

其中，$\boldsymbol{\Xi}_{11} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2(\beta_1 - 1)\boldsymbol{I}$；$\boldsymbol{\Xi}_{12} = -\gamma\boldsymbol{B}$；$\boldsymbol{\Xi}_{13} = 2\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{P}$；$\boldsymbol{\Xi}_{22} = -2\beta_2\boldsymbol{P}$；$\boldsymbol{\Xi}_{23} = -2\gamma\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\Xi}_{33} = -2\boldsymbol{P}$，则存在控制增益矩阵 $\boldsymbol{K} = -\gamma\boldsymbol{P}^{-1}$ 使得式(2)是指数稳定的。

证明：由定理 2 可知，当式(6)成立时，闭环系统(2)是指数稳定的。令 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}$，将控制器增益 $\boldsymbol{K} = -\gamma\boldsymbol{P}^{-1}$ 代入式(6)，则有：

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_{11} & \boldsymbol{\Xi}_{12} & \boldsymbol{\Xi}_{13} \\ * & \boldsymbol{\Xi}_{22} & \boldsymbol{\Xi}_{23} \\ * & * & \boldsymbol{\Xi}_{33} \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

其中，$\boldsymbol{\Xi}_{11} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} - 2\boldsymbol{Q} + 2\beta_1\boldsymbol{Q}; \boldsymbol{\Xi}_{12} = -\gamma\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}; \boldsymbol{\Xi}_{13} = 2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}$；$\boldsymbol{\Xi}_{22} = -2\beta_2\boldsymbol{Q}$；$\boldsymbol{\Xi}_{23} = -2\gamma\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$；$\boldsymbol{\Xi}_{33} = -2\boldsymbol{Q}$。

将式(13)前后同乘正定对角矩阵 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P})$ 即得式(12)。由定理 2 可知，式(2)是指数稳定的，定理证毕。

5 仿真

为比较需要，考虑离散化网络控制系统式(1)[10]，参数矩阵为：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1+\sigma & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

假定 $\tau_m = 1$、$\tau_M = 2$。文献[9]研究式(1)的控制器设计问题，并给出相应算法。文献[10]对文献[9]中算法提出一个保守性更弱的改进算法。此处将通过本例来说明本文算法比文献[10]算法保守性更弱。文献[10]给出算法只适用于 $|\sigma| \le 0.2$ 的情形。当 $|\sigma| > 0.2$ 时，算法失效。令 $\sigma = 0.31$、$\beta_1 = 0.2$、$\beta_2 = 0.1$、$\gamma = 0.1$，可以验证定理 3 具有可行解，通过 Matable LMI 工具箱可解得：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.278\ 0 & -0.041\ 2 \\ -0.041\ 2 & 0.488\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -0.364\ 2 & -0.030\ 7 \\ -0.030\ 7 & -0.207\ 5 \end{bmatrix}$$

当 $\sigma = -0.31$ 时，令 $\beta_1 = 0.2$、$\beta_2 = 0.1$、$\gamma = 0.2$，可以验证定理 3 仍具可行解，通过 Matable LMI 工具箱，可解得：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.546\ 6 & -0.049\ 0 \\ -0.049\ 0 & 0.492\ 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -0.184\ 6 & -0.018\ 4 \\ -0.018\ 4 & -0.204\ 8 \end{bmatrix}$$

这表明本文设计比文献[9-10]的设计具有更弱的保守性。由式(12)可以看出，参数 γ 可以直接用 LMI 工具箱进行求解。当 $\sigma = 0.31$、$\beta_1 = 0.2$、$\beta_2 = 0.1$ 时，可解得 $\gamma = 0.168\ 6$，此时：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.282\ 8 & -0.046\ 1 \\ -0.046\ 1 & 0.518\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -0.605\ 2 & -0.053\ 9 \\ -0.053\ 9 & -0.330\ 3 \end{bmatrix}$$

(下转第 36 页)