

Vague 集理论及其在国画类别区分中的应用

邢鸿雁¹, 张倩生², 张纯桂³

(1. 广东工业大学应用数学学院, 广州 510520; 2. 广东外语外贸大学信息学院, 广州 510420;

3. 广东工业大学艺术设计学院, 广州 510090)

摘 要: 为解决 Vague 值(集)的相似度量问题, 提出一种公理化意义下全面综合的度量方法。通过对现有 Vague 集相似度量的功能进行分析对比, 获得在相似度量公理化下的扩展形式, 并结合模糊熵理论, 综合 Vague 值(集)相对熵的公理化思想, 研究 Vague 值(集)相似度量与相对熵的关系, 给出带参数的计算方法。分析结果证明, 将该方法应用于国画类别的区分识别中, 能获得较好的分类结果。

关键词: Vague 值(集); 相似度量; 模糊熵; 相对熵; 模拟; 类别区分

Vague Sets Theory and Its Application of Category Recognition in Chinese Painting

XING Hong-yan¹, ZHANG Qian-sheng², ZHANG Chun-gui³

(1. School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China;

2. School of Informatics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou 510420, China;

3. Faculty of Arts and Design, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

【Abstract】 As one of the important issues in artificial intelligence, uncertainty measuring methods are put forward and widely used in applications. Considering this, this paper introduces several existing definitions about similarity measure on Vague values(sets), along with the analyzing of their properties. Then it presents an effective matching definition of similarity measure between Vague values(sets). Further, it proposes a formula to compute the entropy of Vague values(sets) together with an axiomatizing idea on fuzzy entropy. All the measures between Vague values(sets) are validated with experimental data. The proposed method is improved and the simulation results show the actual effect on category recognition of Chinese drawing.

【Key words】 Vague values(sets); similarity measure; fuzzy entropy; relative entropy; simulation; category recognition

DOI: 10.3969/j.issn.1000-3428.2013.12.037

1 概述

自从 1965 年 Zadeh 提出模糊集(Fuzzy Sets)理论^[1]以来, 利用模糊集理论来处理模糊性和不确定性的信息和数据已经取得重大进展。模糊集中的隶属度概念可用来描述支持与反对 2 种信息, 但现实中往往不仅出现元素对模糊概念的支持或反对, 还会出现介于支持与反对的中间状态——踌躇性。比如最简单的投票模型, 往往需要同时得知支持和反对的程度信息(也间接体现了踌躇程度)。这时模糊集理论就无法很好解决这类模糊性问题。

Gau 和 Buehrer 于 1993 年提出了 Vague 集理论^[2], 将模糊集理论中的隶属函数单值扩充为一个区间 $[t_A(x), 1-f_A(x)]$, 其中, $t_A(x)$ 表示真隶属函数; $f_A(x)$ 表示假隶属函数。从 Vague 集的这个描述可以看出, 任意元素 x 的 Vague 值

是一个 $[0,1]$ 的子区间 $[t_A(x), 1-f_A(x)]$, 若 $t_A(x)=1-f_A(x)$, 则 A 退化为模糊集, 其隶属函数 $\mu_A(x)=t_A(x)=1-f_A(x)$; 若 $t_A(x)=1-f_A(x)=0$ 或 $t_A(x)=1-f_A(x)=1$, 则 A 退化为经典集合。

Vague 集理论用这种真假隶属函数的定义体现了元素对模糊概念属于与不属于的程度和证据, 比模糊集有更强的表达不确定性的能力, 进一步加强对客观世界描述的真实程度。目前该理论在模糊控制、决策、故障诊断、近似推理和医疗诊断等方面取得了较好的应用成果。

熵是不确定性度量的一种重要方法。熵值反映了在宏观状态确定以后, 系统微观状态发生改变的可能性的多少: 熵的大小和知识的分类能力对应, 即熵越大, 分类能力越强。而相对熵的量值则可以对比出类别之间的差异程度。Vague 集理论中的相似度量问题以及模糊熵的研究, 已经得到众多研究者的关注。

基金项目: 教育部人文社会科学研究青年基金资助项目(12YJCZH281)

作者简介: 邢鸿雁(1964—), 女, 副教授、博士, 主研方向: 模式识别, 离散事件系统; 张倩生, 副教授、博士; 张纯桂, 副教授

收稿日期: 2012-09-03 **修回日期:** 2012-12-19 **E-mail:** 928hongyi@163.com

本文针对 Vague 值(集)的相似度量问题,分析比较现存相似度量的功能,在公理化要求下给出新的度量方法。通过归纳分析模糊熵的公理化要求,提出一个简便实用的 Vague 值(集)相对熵的计算方式,将相似度与模糊熵在形式上相结合,并通过一个主观成分所主导的国画类别区分模型的数据模拟,演示运算的合理性。

2 Vague 值(集)基本概念及其相似度量方法

首先介绍如下相关的基本概念:

定义 1^[3] 设 U 是一个对象空间,对其中的任意一个元素 x , U 上的 Vague 集 A 用一个真隶属函数 $t_A(x)$ 和一个假隶属函数 $f_A(x)$ 表示。 $t_A(x)$ 表示从支持 x 的证据所得出的隶属度下界, $f_A(x)$ 表示从反对 x 的证据所得出的隶属度下界, $t_A(x)$ 和 $f_A(x)$ 均是 $[0, 1]$ 中的某个实数值,且满足 $0 \leq t_A(x) + f_A(x) \leq 1$ 。

定义 2^[4] 一个 Vague 集 $A = [t_A, 1 - f_A]$ 的补集为 $\bar{A} = [t_{\bar{A}}, 1 - f_{\bar{A}}]$, 其中, $t_{\bar{A}} = f_A$; $1 - f_{\bar{A}} = 1 - t_A$ 。

定义 3^[5] 称 Vague 集 A 包含于 Vague 集 B , 记作 $A \subseteq B$, 如果 $t_A(x_i) \leq t_B(x_i)$, 且 $1 - f_A(x_i) \leq 1 - f_B(x_i)$ 。若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$ 。

为叙述简便,若无特别声明,后文用 $U = \{x_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 表示论域,有时用 t_x 表示 $t_A(x)$, f_x 表示 $f_A(x)$ 。记 $m_x = 1 - t_x - f_x$, 表示元素 x 的未知信息;记 $S(x) = t_x - f_x$, 表示支持和反对两方面力量的程度差别,称之为核函数。对于论域 U 上的 2 个 Vague 集 A, B , 分别表示为 $A = \sum_{i=1}^n [t_{x_i}, f_{x_i}] / x_i$, $B = \sum_{i=1}^n [t'_{x_i}, f'_{x_i}] / x_i$, 这时 $m_A(x_i) = 1 - t_A(x_i) - f_A(x_i)$, $m_B(x_i) = 1 - t_B(x_i) - f_B(x_i)$ 。

Vague 值(集)之间的相似度量(用 M 表示),其方法的演进是一个逐步的过程。现存的描述公式有:

(1)文献[6]中的相似度量 M_C

Vague 值 x, y 之间:

$$M_C(x, y) = 1 - |S(x) - S(y)| / 2 \quad (1)$$

Vague 集 A, B 之间:

$$M_C(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(A(x_i), B(x_i))$$

上式满足通常计算模式下,2 个 Vague 值(集)之间的相似程度越大,则相似程度越高。

(2)文献[4]中的相似度量 M_L :

$$M_L(x, y) = 1 - |S(x) - S(y)| / 4 - [|t_x - t_y| + |f_x - f_y|] / 4 \quad (2)$$

(3)文献[5]中的相似度量 M_W

考虑到投票模型中的弃权成分有一部分趋向投赞成票,也有一部分趋向投反对票,因此,为修正诸如出现 $[0, 0]$ 和 $[0, 1]$ 之间的相似度为 0, $[1, 1]$ 和 $[0, 1]$ 之间的相似度为 0, 不符合人们的直觉的情况(因为在投票模型中 $[0, 0]$ 表示所有人都反对, $[0, 1]$ 表示没有人支持,也没有人反对, $[1, 1]$ 表示所有人都支持),同时又需要对弃权部分 $m_x = 1 - t_x - f_x$ 作进一

步细化,将元素 x 的隶属情况用三维表示变为 $(T_x, F_x, m_x^2) = (t_x + t_x m_x, f_x + f_x m_x, m_x m_x)$, 并给出新度量,提高了相似度的区分性能,记为 M_W :

$$M_W(x, y) = [| (T_x - F_x) - (T_y - F_y) | + 2 | (T_x + F_x) - (T_y + F_y) |] / 4 \quad (3)$$

此外在文献[4]的基础上,文献[7]有基于距离公式的相似度量。由于距离定义下的计算较为繁杂也易失真,因此应用上受到限制。如: $M(x, y) = 0$ 的充要条件是 x, y 为 $[0, 0]$, $[0, 1]$ 和 $[1, 1]$ 中的任意 2 个,然而 Vague 值 $[0, 0]$ 和 $[1, 1]$ 之间的相似度为 0 是合理的,但 $[0, 0]$ 和 $[0, 1]$ 之间以及 $[1, 1]$ 和 $[0, 1]$ 之间的相似度为 0 则不应采纳。即使使用式(3)计算 $M_W(x, y)$, 其结果 $[0.4, 0.8]$ 与 $[0.3, 0.8]$ 的相似度甚至比 $[0.4, 0.8]$ 与 $[0.3, 0.7]$ 的相似度还小,这也与直觉观察相悖。

虽然相似度的研究已获得相当多的成果,但还是有未尽之处,需要进一步寻求新的方法。

3 改进的 Vague 值(集)相似度量方法

在公理化要求下描述 Vague 值(集)之间相似度是建立合理泛化公式的大方向。本文在文献[8]的基础上,将 Vague 值(集)相似度量的公理化规则进一步完善,写为:

定义 4 设 $x = [t_x, 1 - f_x]$, $y = [t_y, 1 - f_y]$ 是论域 U 上 Vague 集 A 的 2 个 Vague 值,映射: $M: A \times A \rightarrow [0, 1]$, 称 $M(x, y)$ 是 x, y 之间的相似度,如果 $M(x, y)$ 满足以下条件:

(1)对任意的 $x, y \in A$, $0 \leq M(x, y) \leq 1$ (有界性);

(2) $M(x, y) = M(y, x)$ (对称性);

(3)对任意的 $x, y \in A$, $M(x, x) = 1$; $M(x, y) = 0$ 的充要条件是 $x, y \in \{[0, 0], [1, 1]\}$;

(4)可用 $d(x, y) = 1 - M(x, y)$ 表示 x, y 之间的距离,根据距离性质,对任意的 $x, y, z \in A$, 由于 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, 因此有 $M(x, z) \geq M(x, y) + M(y, z) - 1$ 。

定义 5 设 A, B 是论域 U 上的 2 个 Vague 集。映射 $M: U \times U \rightarrow [0, 1]$, 称 $M(A, B) \in [0, 1]$ 是 Vague 集 A, B 的相似度,如果 $M(A, B)$ 满足:

(1)对任意的 $A, B \in U$, $0 \leq M(A, B) \leq 1$ (有界性);

(2)对称性: 对任意的 $A, B \in U$, $M(A, B) = M(B, A)$ (对称性);

(3)对任意的 $A \in U$, $M(A, A) = 1$;

(4) $M(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = \sum_{i=1}^n [a_i, a_i] / x_i$, $B = \sum_{i=1}^n [b_i, b_i] / x_i$,

其中, $a_i + b_i = 1$ 且 $a_i, b_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$;

(5)用 $D(x, y) = 1 - M(A, B)$ 表示 A, B 之间的距离,则对任意的 Vague 集 $A, B, C \in U$, 有 $M(A, C) \geq M(A, B) + M(B, C) - 1$ 。

在此框架下,针对现存相似度计算公式提出改进:

设 $x = [t_x, 1 - f_x]$, $y = [t_y, 1 - f_y]$ 是 Vague 集 $V \in U$ 上的 2 个 Vague 值: $t_x \in [0, 1]$, $f_x \in [0, 1]$, $t_y \in [0, 1]$, $f_y \in [0, 1]$, 且 $t_x + f_x \leq 1$, $t_y + f_y \leq 1$, $m_x = 1 - t_x - f_x$ 。将 x 的隶属情况用三维表示 $(T_x, F_x, m_x^2) = (t_x + t_x m_x, f_x + f_x m_x, m_x m_x)$ 。 x, y 之间的 2 个相似度为^[8]:

$$M_*(x, y) = 1 - \alpha | (t_x - f_x) - (t_y - f_y) | - \beta (| t_x - t_y | + | f_x - f_y |) \quad (4)$$

$$M_{**}(x, y) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta \right) | (t_x - f_x) + (t_y - f_y) | - \alpha | S(x) - S(y) | - \beta | S'(x) - S'(y) | \quad (5)$$

其中, $\alpha, \beta \geq 0$, 且 $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$; 式(5)中核函数 $S(x) = t_x - f_x$, $S'(x) = T_x - F_x$, 且 $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta < \frac{1}{2}$ 。它们满足定义 4。且相应可获得 U 上 2 个 Vague 集 A, B 的相似度 $M_*(A, B)$ 与 $M_{**}(A, B)$ 。

考虑到未知信息 m_x 在相似度计算中的作用, 简化式(4)为^[9]:

$$M(x, y) = 1 - \frac{1}{4} [(S_x - S_y) + | t_x - t_y | + | f_x - f_y | + | m_x - m_y |] \quad (6)$$

为在不影响公理化定义要求的同时避免繁复, 将式(6)进一步推广, 得到改进的 Vague 值相似度量公式。具体形式改为:

$$M_k(x, y) = 1 - \frac{1}{3+k} [(S_x - S_y) + | t_x - t_y | + | f_x - f_y | + k | m_x - m_y |] \quad (7)$$

同时, Vague 集 A, B 相似度量公式为:

$$M_k(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_k(A(x_i), B(x_i))$$

可以验证, 式(7)满足定义 4。若条件允许, k 可取任何实数。这里为计算简便, k 取正整数。显然, 若 $k=1$, 则式(7)成为式(6)。

4 Vague 值(集)的熵及相对熵

与模糊熵有关的相对熵的量值可以从一个侧面衡量类别的相似程度, 体现之间的差异。目前 Vague 集模糊熵研究也已获得了一些成绩。比如, 对于论域 U 上的 Vague 集 $A = \sum_{i=1}^n [t_{x_i}, f_{x_i}] / x_i$ 的模糊熵 $VE(A)$, 以下 2 个公式用来计算 A 的模糊熵^[10]:

$$VE_1(A) = \frac{\sum_{i=1}^n [m_{x_i} - | t_{x_i} - f_{x_i} | + 1]}{\sum_{i=1}^n [m_{x_i} + | t_{x_i} - f_{x_i} | + 1]}$$

$$VE_2(A) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [m_{x_i}^2 - (t_{x_i} - f_{x_i})^2 + 1]$$

其中, $m_x = 1 - t_x - f_x$ 。

为满足直觉要求与应用需要, 应在宏观意义上对 Vague 值(集)模糊熵进行公理化描述, 使它既符合熵的物理意义也具备 Vague 值(集)模糊熵的特定内容^[11]。现在已有结果之上, 对相关公理做进一步规范。

定义 6 设 A, B 是论域 U 上的 Vague 集, 若函数 $VE: U \rightarrow [0, 1]$ 满足:

(1) $0 \leq VE(A) \leq 1$, $VE(A) = 0 \Leftrightarrow [t_A(x_i), 1 - f_A(x_i)] \in \{[0, 0], [1, 1]\}$, 即 A 为经典集合;

(2) Vague 熵的最大值为 1, 且 $VE(A) = 1 \Leftrightarrow t_A = f_A$;

(3) $m_A(x_i) = m_B(x_i)$, $| t_A(x_i) - f_A(x_i) | > | t_B(x_i) - f_B(x_i) |$ 时, 有 $VE(A) < VE(B)$;

(4) 当 $| t_A(x_i) - f_A(x_i) | = | t_B(x_i) - f_B(x_i) |$, 且 $m_A(x_i) > m_B(x_i)$ 时, $VE(A) > VE(B)$;

(5) $VE(A) = VE(\bar{A})$, 即 Vague 集的模糊熵和其补集的模糊熵相等。

根据文献[12]及此处的公理内容, 构造计算 Vague 集模糊熵的公式, 并给出证明。

定理 1 设 $x = [t_x, 1 - f_x]$, 令 $VE(x) = \frac{1}{(1+\lambda)} (1 + \lambda m_x - | t_x - f_x |)$ ($\lambda > 0$), 则 $VE(x)$ 是满足定义 6 的模糊熵。

证明:

(1) $VE(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda m_x - | t_x - f_x | = 0$ 。

如果 $[t_x, 1 - f_x] \in \{[0, 0], [1, 1]\}$, 显然这时 $m_x = 0$, 且 $| t_x - f_x | = 1$, 故 $1 + \lambda m_x - | t_x - f_x | = 0$; 反之, 当 $1 + \lambda m_x - | t_x - f_x | = 0$ 时, 由于 $0 \leq | t_x - f_x | \leq 1$, $0 \leq m_x \leq 1$, $\lambda > 0$, 得到 $m_x = 0$, 以及 $| t_x - f_x | = 1$ 。故有 $[t_x, 1 - f_x] \in \{[0, 0], [1, 1]\}$ 。

(2) 只需说明对任何 x , $VE(x) = 0 \Leftrightarrow t_x = f_x$ 。

因为 $VE(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda m_x - | t_x - f_x | = 1 + \lambda$, 也就是 $\lambda(m_x - 1) = | t_x - f_x |$ 。又 $\lambda > 0$, $0 \leq m_x \leq 1$, 故 $\lambda(m_x - 1) \leq 0$, 但 $| t_x - f_x | \geq 0$, 从而有 $\lambda(m_x - 1) = | t_x - f_x | = 0$, 即 $t_x = f_x$ 。

(3) 当 $m_x = m_y$ 而且 $| t_x - f_x | > | t_y - f_y |$ 时, 立即有 $\frac{1}{(1+\lambda)} (1 + \lambda m_x - | t_x - f_x |) < \frac{1}{(1+\lambda)} (1 + \lambda m_y - | t_y - f_y |)$, 即得 $VE(x) < VE(y)$ 。

(4) 当 $| t_x - f_x | = | t_y - f_y |$ 且 $m_x > m_y$ 时, 有 $1 + \lambda m_x - | t_x - f_x | > 1 + \lambda m_y - | t_y - f_y |$, 不难得到 $VE(A) > VE(B)$ 。

(5) 根据定义 2 及定义 6, 有:

$$VE(\bar{A}) = \frac{1}{(1+\lambda)} (1 + \lambda m_{\bar{A}} - | t_{\bar{A}} - f_{\bar{A}} |) = \frac{1}{(1+\lambda)} (1 + \lambda m_A - | t_A - f_A |) = VE(A)$$

在此基础上, 有:

定理 2 设 $A = \sum_{i=1}^n [t_{x_i}, f_{x_i}] / x_i$ 是论域 U 上的 Vague 集, 则 $VE(A)$ 是满足定义 4 的模糊熵, 这里 $VE(A) = \frac{1}{n(1+\lambda)} \sum_{i=1}^n (1 + \lambda m_{x_i} - | t_{x_i} - f_{x_i} |)$, $\lambda > 0$ 。

注: 实际应用时可根据需要调整 λ 值。对于一元化的熵计算, 选取一个简便的 λ 值即可。例如当 $\lambda = 2$ 时, 获得

文献[9]中的情形。

下面结合文献[13]中相似度的研究结果,给出 Vague 集相对熵的公理化描述,并进一步结合计算结果研究应用模型。

定义 7(相对熵公理化描述) 设 A, B 是论域 U 上的 2 个 Vague 集。

A 对 B 的相对熵 $VE(A, B)$ 应满足:

(1) 非负性: $VE(A, B) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $VE(A) = 0$;

(2) 次可加性: $VE(A, B) \leq VE(A) + VE(B)$, 等号成立当且仅当 $VE(B) = 0$ 或 A, B 的相似度量 $M(A, B) = 1$ 。

依此定义,可构造一个 Vague 值(集)相对熵的计算形式如下:

定理 3 设 A, B 是论域 $U = \{x_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 上的 2 个 Vague 集, $A = \sum_{i=1}^n [t_{x_i}, f_{x_i}] / x_i$, $B = \sum_{i=1}^n [t'_{x_i}, f'_{x_i}] / x_i$ 。函数 $VE(A, B)$ 是满足定义 7 中 A, B 的相对熵,这里

$VE(A, B) = \frac{VE(A)}{M(A, B)}$, 其中, A, B 的相似度量 $M(A, B) =$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(A(x_i), B(x_i)) \neq 0$ 。

证明:

显然 $VE(A, B) = \frac{VE(A)}{M(A, B)}$ 符合定义 7 中的(1)非负性。

其实,定义 7 中的次可加性也不难得到,这是因为:当

$M(A, B) \neq 0$ 时, $VE(B, A) = \frac{VE(B)}{M(B, A)} = \frac{VE(B)}{M(A, B)} \geq 0$;

又由于 $M(A, B) \leq 1$, 因此有 $VE(A, B) \leq VE(A, B) +$

$VE(B, A) = \frac{VE(A) + VE(B)}{M(A, B)} \leq VE(A) + VE(B)$, 等号成立

当且仅当 $VE(B) = 0$ 或 $M(A, B) = 1$ 。

在 Vague 值(集)中,相对熵刻画了论域 U 上 Vague 值(集)熵的演化规律以及不同 Vague 值(集)之间的相对熵与相似度量结果的联系。定理 3 还表明:当相似度 $M(A, B)$ 增大时, A, B 之间的相对熵减少——符合信息系统中有关熵的性能,即熵是消除不确定因素的一种度量。

5 相似度理论在国画分类中的应用

中国古画鉴别是文物鉴定类别中难度很大的一个门类。以传统绘画为例,除了要依据“气韵生动”、“意境深邃”和“格调高雅”等形容国画艺术类别高下的描述形式,还要关注辅助依据的信息,如题款、题跋、印章、纸绢、装裱、著录。鉴于“专家也只是在某个领域里的专家”,有必要探索一套普适的分类方法。模型归类方法的关键在于,在各侧面评价信息相对确定但不够完备的情况下,如何将一幅国画作品归入某个信息已知或已经确认好的国画类别。本节以 Vague 集相似度以及熵理论为依据,分析画作鉴别归类的途径。

设论域 $U = \{x_i | i = 1, 2, \dots, 8\}$, 其中,八元素 $x_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ 分别对应一幅画作的主要信息:内容,气韵,墨法,构图以及辅助信息:题款,题跋,印章,装裱。论域 U 上 Vague 集 A, B 表示 2 幅已知模式信息的作品。

对比各相似度计算公式的结果,如表 1 所示。

表 1 Vague 值(集)之间的各种相似度量比较

x_i	A	B	M_C	M_L	M_W	M_*	M_{**}	M_1	M_2	M_3
1	[0.3,0.8]	[0.4,0.8]	0.95	0.95	0.923	0.950	0.946	0.925	0.92	0.917
2	[0.3,0.9]	[0.4,0.8]	1.00	0.95	0.890	0.970	0.945	0.900	0.88	0.863
3	[0.4,0.7]	[0.4,0.8]	0.95	0.95	0.928	0.950	0.944	0.925	0.92	0.917
4	[0.5,0.8]	[0.4,0.8]	0.95	0.95	0.938	0.950	0.950	0.925	0.92	0.917
5	[1.0,1.0]	[0.0,1.0]	0.50	0.50	0.250	0.500	0.500	0.250	0.20	0.167
6	[0.0,0.0]	[0.0,1.0]	0.50	0.50	0.250	0.500	0.500	0.250	0.20	0.167
7	[0.5,0.5]	[0.0,1.0]	1.00	0.75	0.500	0.833	0.750	0.500	0.40	0.333
8	[0.5,0.5]	[1.0,1.0]	0.50	0.50	0.750	0.500	0.500	0.500	0.50	0.500

注:表中 $M_C, M_L, M_W, M_*, M_{**}$ 分别使用式(1)~式(5)计算, M_* 中取 $\alpha = 1/3$, M_{**} 中取 $\alpha = \beta = 1/8$; M_k 对应式(7),即本文给出的改进计算式($k=1,2,3$)。

从表 1 中的数据可知: M_C 公式简洁,却会对相似度的度量产生与人的自觉不相符的结果:如 [0.3,0.9] 与 [0.4,0.8] 以及 [0.5,0.5] 与 [0.1], 相似度均为 1, 这明显与事实相悖; M_L 与 M_* 在相似度的区分上有增强,但还不能满足需要,如用在计算 Vague 值 [0.3,0.8]、[0.4,0.7]、[0.5,0.8] 分别与 [0.4,0.8] 的相似度时,结论均为 0.95。这个情况说明,调节 M_*

中的权重系数不能全面解决相似度的分辨性能(适当选取时可以有效提高相似度表现力)。此外, M_W 和 M_{**} 对 2 个 Vague 值 x, y 之间的相似度分辨能力又有提高,但用 M_W 在计算 [0.4,0.8] 与 [0.3,0.9], [0.4,0.8] 与 [0.3,0.8] 的相似度时,得出后者的相似度高于前者的相似度;在计算 [0.1] 与 [0.5,0.5] 以及 [1.1] 与 [0.5,0.5] 的相似度时,得出前者的相似度低于后者的相似度……这些都与用其他公式计算的结果违背,也与实际模型不符。对比结果显示,本文给出的式(7)在不同参数 k 下的 M_k 所显示的灵活性、精确性等均有改善。

设现有待识别对象 C (其中元素用 z 标示), 已知其 Vague 集特征描述 (对应各个相关测评信息), 问样本 C 应该归属 A 、 B 哪种模式。

方法 1 采用相似度计算的解决过程, 分 2 步:

(1) 利用式(7)计算 Vague 集 A 、 C 与 B 、 C 元素之间的相似度 $M_k(x, z)$, $M_k(y, z)$ ($k=1, 2, 3$), 结果如表 2 所示。

表 2 A 、 C 与 B 、 C 元素之间的相似度

x_i	A	B	C	$M_1(x, z)$	$M_2(x, z)$	$M_3(x, z)$	$M_1(y, z)$	$M_2(y, z)$	$M_3(y, z)$
1	[0.3, 0.8]	[0.4, 0.8]	[0.5, 0.7]	0.775	0.82	0.750	0.900	0.86	0.870
2	[0.3, 0.9]	[0.4, 0.8]	[0.4, 0.7]	0.800	0.74	0.700	0.925	0.92	0.917
3	[0.4, 0.7]	[0.4, 0.8]	[0.4, 0.9]	0.850	0.84	0.833	0.925	0.92	0.917
4	[0.5, 0.8]	[0.4, 0.8]	[0.4, 0.8]	0.925	0.92	0.917	1.000	1.00	1.000
5	[1.0, 1.0]	[0.0, 1.0]	[0.5, 0.9]	0.625	0.62	0.617	0.650	0.64	0.600
6	[0.0, 0.0]	[0.0, 1.0]	[0.1, 0.8]	0.375	0.36	0.350	0.825	0.80	0.783
7	[0.5, 0.5]	[0.0, 1.0]	[0.3, 0.8]	0.725	0.68	0.650	0.725	0.68	0.650
8	[0.5, 0.5]	[1.0, 1.0]	[0.6, 0.8]	0.750	0.76	0.770	0.650	0.68	0.700

(2) 根据表 2 的结果, 然后按照公式 $M_k(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_k(A(x_i), B(x_i))$ 计算出不同 k 值下的相似度:

$$M_1(A, C) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 M_1(A(x_i), C(x_i)) = 0.728$$

$$M_2(A, C) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 M_2(A(x_i), C(x_i)) = 0.717$$

$$M_3(A, C) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 M_3(A(x_i), C(x_i)) = 0.698$$

$$M_1(B, C) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 M_1(B(x_i), C(x_i)) = 0.825$$

$$M_2(B, C) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 M_2(B(x_i), C(x_i)) = 0.8125$$

$$M_3(B, C) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 M_3(B(x_i), C(x_i)) = 0.8046$$

根据择近原则, 选择相似度高的类型, C 应归入 B 类。

方法 2 采用 Vague 集相对熵方法, 过程如下:

(1) 根据定理 2 计算 $VE_k(C)$, 即 $VE_k(C) = \frac{1}{n(1+k)}$

$\sum_{i=1}^n (1 + km_{z_i} - |t_{z_i} - f_{z_i}|)$ ($k=1, 2, 3$), 得:

$$VE_1(C) = 0.625, VE_2(C) = 0.55, VE_3(C) = 0.5125$$

(2) 根据相对熵关系式 $VE_k(C, A) = \frac{VE_k(C)}{M_k(C, A)}$, 以及

$$VE_k(C, B) = \frac{VE_k(C)}{M_k(C, B)}, \text{ 得到 } C \text{ 与 } A、C \text{ 与 } B \text{ 在不同 } k \text{ 值}$$

情况下的相对熵:

$$VE_1(C, A) = \frac{VE_1(C)}{M_1(A, C)} = 0.8585$$

$$VE_2(C, A) = 0.7671$$

$$VE_3(C, A) = 0.7342$$

$$VE_1(C, B) = \frac{VE_1(C)}{M_1(B, C)} = 0.7575$$

$$VE_2(C, B) = 0.6769$$

$$VE_3(C, B) = 0.6370$$

根据熵值比较, 一致地有 $VE_k(C, A) > VE_k(C, B)$, $k=1, 2, 3$ 。由于相对熵越小表明类型越接近, 因此 C 归入 B 类。

6 结束语

基于 Vague 集相似度量进行模式识别与分类是人工智能研究领域比较流行的方法之一, 而由信息系统扩展得来模糊熵概念可以很好地辅助完善不确定信息系统中的不确定性度量, 是度量信息粒度的重要方法。本文在 Vague 集相似度量与模糊熵的公理化定义的基础上, 研究不同相似度量的递进发展历程, 考察它们的特点, 获得了更灵活的计算形式; 讨论相对熵与相似度量的关系, 通过公理化思想构造满足条件的计算方式, 进一步将给出的方法应用到艺术品的分类鉴定中, 证明了其应用价值。这些结果发展了不完备信息系统的度量理论, 可为进一步应用于知识发现及数据挖掘等领域奠定基础。

参考文献

- [1] Zadeh L A. Fuzzy Sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] Gau W L, Buehrer D J. Vaguesets[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1993, 23(2): 610-614.
- [3] 闫德勤, 迟忠先, 艳红. 关于 Vague 集的相似度量[J]. 模式识别与人工智能, 2004, 17(1): 22-26.
- [4] 李凡, 徐章艳. Vague 集之间的相似度量[J]. 软件学报, 2001, 12(6): 922-927.
- [5] 刘华文. 模糊模式识别的基础——相似度量[J]. 模式识别与人工智能, 2004, 17(2): 141-145.
- [6] Chen S M. Measures of Similarity Between Vaguesets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 74(2): 217-223.
- [7] 李艳红, 迟忠先, 闫德勤. Vague 相似度量与 Vague 熵[J]. 计算机科学, 2002, 29(12): 129-132.
- [8] 张清华. Vague 值(集)相似度量的研究[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(3): 1855-1859.

(下转第 180 页)